CALCOLO ALGEBRICO

DEL MEDESIMO AUTORE

Algebra Elementare ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (1° biennio) secondo i Programmi Governativi.

Un volume di pag. 426 elegantemente legato in tela inglese . . . . . L. 3,50

MARCO NASSÒ

ELEMENTI DI CALCOLO ALGEBRICO

AD USO DELLE SCUOLE NORMALI

IN CONFORMITÀ DEI PROGRAMMI MINISTERIALI

CON COPIOSE NOTE STORICHE
FREQUENTI CONSIGLI PRATICI PER INDIRIZZARE L'ALUNNO
ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
MOLTI ESERCIZI E PROBLEMI GRADUATI DA RISOLVERE
E NUMEROSI ESERCIZI E PROBLEMI
MINUTAMENTE RISOLTI



TORINO
TIPOGRAFIA E LIBRERIA SALESIANA
1899

(N° 1112 — 2M)

ELEMENTI DI CALCOLO ALGEBRICO

PARTE PRIMA

Preliminari.

L'OPERAZIONE PIÙ E L'ADDIZIONE ARITMETICA. *

1. Ogni numero ha il numero *successivo*. **

Esempio. Il successivo di 0 è 1; il successivo di 1 è 2; il successivo di 2 è 3; il successivo di 3 è 4; ecc.

Il numero 0 non è il successivo di alcun numero.

2. DEFINIZIONE. L'operazione *più* è quell'operazione per cui si passa da un numero al successivo.

COROLLARIO. Fare sopra un numero l'operazione *più* significa passare da questo numero al successivo.

Osservazione. Il segno dell'operazione *più* è + che si legge *più,* e si scrive a destra del numero dato.

Esempio. 0+ significa che su 0 si fa l'operazione *più,* ossia si passa da 0 al successivo; 5+ significa che su 5 si fa l'operazione *più,* ossia si passa da 5 al successivo; ecc. ***

---

* Per le note storiche mi sono servito delle principali pubblicazioni storiche italiane ed estere, ed in particolare della pregevolissima opera che il prof. Moritz Cantor sta pubblicando a Lipsia col titolo: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*

** Dicendo *numero* intenderemo *numero intero, aritmetico.* Questa proposizione ci dice che *dopo ogni numero ne viene un altro;* od anche: *non vi è un numero che sia l'ultimo di tutti i numeri.* Essa si suole enunciare anche così: *La serie dei numeri interi è illimitata.*

*** Se, partendo da zero, alla destra di ogni numero scriviamo il numero successivo, avremo i numeri scritti in quest'ordine: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,..... ove i punti tengono il luogo dei numeri che non si scrivono; e potremo anche dire che, *fare sopra un numero l'operazione più, significa passare da questo numero a quello che gli sta immediatamente a destra.* All'insieme dei numeri scritti in quest'ordine daremo, per brevità, il nome di *successione naturale dei numeri.*

3. DEFINIZIONE. Fare sul numero a l'operazione *più* b volte, significa fare su a l'operazione *più;* sul risultato fare l'operazione *più;* sul nuovo risultato fare l'operazione *più;* ecc. fino a b volte. *

Ossia significa: *passare dal numero a al successivo; poi da questo al successivo; poi da questo al successivo; ecc. b volte.*

Si indica scrivendo $a+b$; e, se m è il numero a cui si arriva, scriveremo $a+b=m$. **

Esempio. Fare su 4 l' operazione ***più*** 3 volte, significa fare su 4 l'operazione ***più,*** cioè passare da 4 al successivo che è 5; poi fare su 5 l'operazione ***più,*** cioè passare dal 5 al successivo che è 6; poi fare su 6 l'operazione ***più,*** cioè passare da 6 al successivo che è 7. Il numero 7 è il risultato cercato; e scriveremo $4+3=7$.

Osservazione 1ª. Invece di dire che *si fa su a l' operazione **più** b volte,* diremo più brevemente: *si fa su a l'operazione **più** b,* e scriveremo: *si fa su a l'operazione* $+b$. ***

Osservazione 2ª. In $a+b$, il segno $+$ posto alla destra di a indica che su a si deve fare l'operazione ***più;*** ed il numero b, posto alla destra del segno $+$, indica che l'operazione ***più*** si deve fare b volte.

Ne segue che $a+1$ significa che su a si deve fare l' operazione ***più*** una volta; ma anche $a+$ significa la stessa cosa: avremo quindi $a+1=a+$. ****

Osservazione 3ª. Si osservi che colla scrittura $a+b$ indicheremo indifferentemente queste due cose: 1° *che su a si deve fare l'operazione* $+b$; 2° *il numero al quale si arriva facendo su a l'operazione* $+b$.

Dalla definizione del § 3 deriva immediatamente:

COROLLARIO. $0+a=a$.

4. DEFINIZIONE. Fare sul numero a l'operazione *più* zero volte, significa non fare su a alcuna operazione.

Ne segue immediatamente:

COROLLARIO. $a+0=a$.

5. DEFINIZIONE. Dicesi *somma* dei numeri a, b, il numero al quale si arriva facendo su a l'operazione *più* b volte. *****

---

* Per maggiori indicazioni sopra questa definizione, si veda: NASSÒ - *Algebra Elementare ad uso dei Licei.*

** È noto che il segno $=$ si legge *eguale;* che ogni scrittura della forma $a=b$ si chiama *eguaglianza*; e che ciò che sta a sinistra del segno $=$ si dice *primo membro dell'eguaglianza*, e ciò che sta a destra *secondo membro dell'eguaglianza.* Il segno $=$ dell'eguaglianza fu introdotto da Roberto Recorde nato a Tenby (Inghilterra) nel 1510, e morto a Londra nel 1558. Prima si usava la parola *eguale*, o la sua iniziale.

*** Si osservi che nel pronunziare la frase *si fa su a l'operazione più b volte*, si fa pausa dopo *più;* invece la frase *si fa su a l'operazione* $+b$ si legge come se fosse scritto: *si fa su a l'operazione piubì.*

**** Sono sinonime le espressioni *fare su a l'operazione più una volta*, e *fare su a l'operazione più.*

***** Sono sinonime le parole *somma, totale.* Sono pure sinonime le espressioni: *trovare la somma di a, b; sommare b con a; addizionare b con a; fare l'addizione dei numeri a, b; ed a aggiungere b.*

Esempio. Facendo su 4 l'operazione *più* 3 volte, si arriva al numero 7; dunque la somma dei numeri 4 e 3 è 7.

6. DEFINIZIONE. Dicesi *somma* dei numeri a, b, c, d, ecc. il numero al quale si arriva facendo prima su a l'operazione *più* b volte, poi sul risultato l'operazione *più* c volte, poi sul nuovo risultato l'operazione *più* d volte, ecc. *

La somma dei numeri a, b, c, d, si indica scrivendo $a+b+c+d$.

7. DEFINIZIONE. *L'addizione* dei numeri è quell'operazione per cui dati più numeri se ne trova la somma.

Ciascuno dei numeri dati si chiama *un addendo* od anche *una parte* della somma.

L'OPERAZIONE MENO E LA SOTTRAZIONE ARITMETICA.

8. DEFINIZIONE. Se il successivo del numero a è il numero b, diremo che a è il *precedente* di b.

Esempio. Il precedente di 6 è 5; il precedente di 4 è 3; il precedente di 2 è 1; il precedente di 1 è 0.

Osservazione. Lo zero non ha per precedente alcun numero (§ 1).

9. DEFINIZIONE. L'operazione *meno* è quell'operazione per cui da un numero si passa al precedente.

COROLLARIO. Fare sopra un numero l'operazione *meno* significa passare da questo numero al precedente.

Osservazione. Il segno dell'operazione *meno* è il segno — che si legge *meno*, e si scrive a destra del numero dato.

Esempio. 4— significa che su 4 si fa l'operazione *meno*, ossia si passa da 4 al precedente; 3— significa che su 3 si fa l'operazione *meno*, ossia si passa da 3 al precedente; ecc. **

10. DEFINIZIONE. Fare sul numero a l'operazione *meno* b volte, significa fare su a l'operazione *meno*; sul risultato fare l'operazione *meno*; sul nuovo risultato fare l'operazione *meno*; ecc. fino a b volte.

Ossia significa *passare dal numero a al precedente; poi da questo al precedente; poi da questo al precedente; ecc. b volte.*

Si indica scrivendo $a-b$; e, se m è il numero a cui si arriva, scriveremo $a-b=m$.

Esempio. Fare su 5 l'operazione *meno* 3 volte, significa fare su 5 l'operazione *meno*, cioè passare da 5 al precedente che è 4; poi fare

---

* Sono sinonime le espressioni *ad a aggiungere b, al risultato aggiungere c, al nuovo risultato aggiungere d, ecc.* e *ad a aggiungere successivamente b, c, d, ecc.*

** Riferendoci alla successione naturale dei numeri, potremo anche dire che *fare sopra un numero l'operazione meno, significa passare da questo numero a quello che gli sta immediatamente a sinistra.*

su 4 l'operazione ***meno,*** cioè passare da 4 al precedente che è 3; poi fare su 3 l'operazione ***meno,*** cioè passare da 3 al precedente che è 2. Il numero 2 è il risultato cercato; e scriveremo $5—3=2$.

Osservazione 1ª. Invece di dire che *si fa su a l'operazione* ***meno*** *b volte*, diremo più brevemente: *si fa su a l'operazione* ***meno*** *b*, e scriveremo: *si fa su a l'operazione —b.* *

Osservazione 2ª. In $a—b$ il segno — posto alla destra di a indica che su a si deve fare l'operazione ***meno;*** ed il numero b, posto alla destra del segno —, indica che l'operazione ***meno*** si deve fare b volte.

Ne segue che $a—1$ significa che su a si deve fare l'operazione ***meno*** una volta; ma anche $a—$ significa la stessa cosa: quindi $a—1=a—$. **

Osservazione 3ª. Si osservi che colla scrittura $a—b$ indicheremo indifferentemente queste due cose: 1° *che su a si deve fare l'operazione —b;* 2° *il numero al quale si arriva facendo su a l'operazione —b.*

11. DEFINIZIONE. Fare sul numero *a* l'operazione *meno* zero volte, significa non fare su *a* alcuna operazione.

Ne segue immediatamente:

COROLLARIO. $a—0=a$.

12. DEFINIZIONE. Dicesi *differenza* dei numeri *a, b,* il numero al quale si arriva facendo su *a* l'operazione *meno* *b* volte. ***

Esempio. Facendo su 5 l'operazione ***meno*** 3 volte, si arriva al numero 2. Dunque la differenza dei numeri 5 e 3 è 2.

13. DEFINIZIONE. La *sottrazione* dei numeri è quell'operazione per cui dati due numeri se ne trova la differenza.

Il primo dei numeri dati si chiama *minuendo*, il secondo *sottraendo*. ****

---

* Osservazione analoga a quella fatta nella nota *** del § 3.

** Sono sinonime le espressioni *fare su a l'operazione* ***meno*** *una volta*, e *fare su a l'operazione* ***meno.***

*** Sono sinonimi *differenza* e *resto*. Sono pure sinonime le espressioni: *trovare la differenza fra a, b; da a sottrarre b; da a togliere b.* È sottinteso che si suppone che il numero b non sia maggiore del numero a.

**** Non si sa da chi furono introdotti i segni +, — per indicare l'addizione e la sottrazione. Essi compaiono per la prima volta nell'Aritmetica di Giovanni Widmann di Eger, stampata a Lipsia nel 1489. Il Widmann li presenta come segni già noti. Prima si usavano le parole *più, meno,* o le loro iniziali *p, m,* oppure , $\tilde{p}$, $\tilde{m}$. Diofanto di Alessandria (nato nel 325 e morto nel 409) introdusse il segno ⋔ per la sottrazione, ma non usò alcun segno speciale per l'addizione.

Per maggiori indicazioni sul concetto di numero e sulle operazioni *più* e ***meno,*** si possono consultare i due bellissimi articoli « *Sul concetto di numero* » che il chiarissimo prof. G. Peano pubblicò nel 1891 nella sua *Rivista di Matematica.*

CAPO PRIMO.

Numeri con segno.

14. *Problema. Vado al mercato con a lire, e spendo b lire nella compera di un oggetto. Quante lire mi rimangono?*

Per la risoluzione del problema consideriamo vari casi particolari.

$a=7$ e $b=4$.	*Risposta:*	Mi	rimangono	7—4 = 3 lire.	
$a=7$ e $b=5$.	»	»	»	7—5 = 2 lire.	
$a=7$ e $b=6$.	»	»	»	7—6 = 1 lira.	
$a=7$ e $b=7$.	»	»	»	7—7 = 0 lire.	
$a=7$ e $b=8$.	»	»	»		1 lira di debito.
$a=7$ e $b=9$.	»	»	»		2 lire di debito.
$a=7$ e $b=10$.	»	»	»		3 lire di debito.

Per esaminare più da vicino il metodo seguito, ci è comodo avere sott'occhio la successione naturale dei numeri interi

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,.........

In tutti i casi considerati è $a=7$.

Nel 1°, in cui $b=4$, ho fatto su 7 l'operaz. —4, ed avuto per risultato 3.
Nel 2°, in cui $b=5$, ho fatto su 7 l'operaz. —5, ed avuto per risultato 2.
Nel 3°, in cui $b=6$, ho fatto su 7 l'operaz. —6, ed avuto per risultato 1.
Nel 4°, in cui $b=7$, ho fatto su 7 l'operaz. —7, ed avuto per risultato 0.
Nel 5°, in cui $b=8$, (se voglio seguire il metodo precedentemente tenuto) dovrei fare su 7 l'operazione —8, ossia l'operazione ***meno*** 8 volte, ed il numero a cui arriverei sarebbe il numero cercato. Ma, dopo aver fatto l'operazione ***meno*** 7 volte, arrivo allo 0, e non ho più numeri. D'altra parte è evidente che, se ho 7 lire e ne spendo 8, ritorno a casa con una lira di debito. Scrivo dunque 1 alla sinistra di 0, ed ottengo la successione:

1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,.....

Ora osservo che l'1 si trova scritto due volte; cioè una volta a destra, ed una volta a sinistra di zero. Osservo ancora che, se mi fermo all'1 di destra, è segno che *possiedo una lira;* e se mi fermo all'1 di sinistra, è segno che ho *una lira di debito*. Posso dunque dire che l'1 di destra rappresenta *lire che possiedo*, e l'1 di sinistra *lire di debito*. Per distinguerli l'uno dall' altro, metto un segno qualsiasi ad uno di essi; p.e. sottolineo quello di sinistra. Avrò così la successione:

$\underline{1}$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,........

Nel 6° Caso, in cui $b=9$, dovrei fare su 7 l'operazione —9 (ossia l'operazione ***meno*** 9 volte); ma, dopo averla fatta 8 volte, arrivo al nu-

mero $\underline{1}$ e non ho più numeri. D'altra parte so che il risultato è 2 *lire di debito*, che, secondo la convenzione fatta, posso rappresentare con $\underline{2}$. Scrivo $\underline{2}$ alla sinistra di $\underline{1}$, ed ottengo la successione:

$\underline{2}$, $\underline{1}$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,......

Analogamente, il 7° Caso mi porta a scrivere $\underline{3}$ alla sinistra di $\underline{2}$; e così posso continuare fin che voglio.

Si vede subito che la risoluzione del problema mi ha condotto ad estendere la successione naturale dei numeri interi anche alla sinistra di 0, in modo da avere la successione:

....$\underline{5}$, $\underline{4}$, $\underline{3}$, $\underline{2}$, $\underline{1}$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,....

la quale si estende indefinitamente dalle due parti.

15. Fra i numeri posti alla destra, e quelli posti alla sinistra di zero, vi è questa differenza essenziale, che i primi indicano *lire che possiedo;* i secondi, *lire di debito*. Ogni numero di questa successione esprime dunque due cose, cioè: 1° **la grandezza** (ossia il *valore numerico*) della somma di cui si tratta; 2° **una qualità** particolare della somma (ossia la *qualità* di essere somma che *si possiede*, o somma *di debito*).

16. Alle medesime conclusioni mi avrebbe condotto la risoluzione di quest'altro problema: *In una prima partita guadagno a lire; in una seconda partita perdo b lire. Quanto ho alla fine del giuoco?*

Ragionando come nel problema precedente, trovo che ho lire di *guadagno*, o di *perdita*, secondochè è $a>b$ oppure $a<b$; che non ho nulla se è $a=b$. * In questo caso i numeri alla destra di zero rappresentano lire di *guadagno;* quelli alla sinistra di zero, lire di *perdita*.

Ad analoghe conclusioni mi avrebbe condotto la risoluzione del problema: *Sopra una retta, a partire da un certo punto A della retta, percorro prima a metri verso destra, e poi b metri verso sinistra. Dopo ciò a quale distanza mi trovo dal punto di partenza?* Mi troverò a *destra* od a *sinistra* del punto A, secondochè è $a>b$, oppure $a<b$; mi troverò in A se è $a=b$. In questo problema, i numeri alla destra di zero rappresentano distanze alla *destra* del punto A; i numeri alla sinistra di zero rappresentano distanze alla *sinistra* del punto A.

Questi e tanti altri problemi analoghi si risolvono in ogni caso particolare col solo sussidio dell'Aritmetica. Però, per poterli risolvere, bisogna considerare, nelle grandezze di cui si tratta, non solo il *valore quantitativo*, ma ancora qualche altra *proprietà* delle grandezze stesse. Nei casi esaminati si è tenuto conto anche della proprietà che esse avevano di essere somme di danaro *possedute*, o *di debito; guadagnate*, o *perdute;* di essere distanze verso *destra*, o verso *sinistra* di un punto fisso. Il numero che rappresenta queste grandezze, deve perciò esprimere

* La sostituzione dei segni $>$, $<$ alle parole *maggiore, minore*, è dovuta a Tommaso Harriot, nato in Oxford nel 1560 e morto a Londra nel 1621.

due cose, cioè: 1° *il valore quantitativo*, 2° *la qualità* speciale che si considera nella grandezza di cui si tratta.

17. L'Aritmetica rappresenta il *valore quantitativo* delle grandezze con un segno speciale (il segno del numero); ma, per rappresentare la *qualità* delle grandezze, invece di far uso di un segno speciale, si serve delle parole del linguaggio ordinario, dicendo p.e. 5 lire di *guadagno*, 9 lire di *perdita*, ecc. Sarebbe certo più comodo rappresentare anche la *qualità* delle grandezze con segni speciali; ma, in Aritmetica (ove le questioni si trattano sempre sopra numeri determinati), non se ne ricaverebbero grandi vantaggi pratici. Ciò diventa necessario in Algebra, ove si ha bisogno di trattare le questioni sui numeri indipendentemente dai valori particolari dei numeri stessi.

Poichè, per ogni grandezza, le *qualità* che l'Algebra considera sono sempre *due qualità opposte fra loro* (come sarebbe: per una somma, la *qualità* di essere *guadagnata* o *perduta*, di essere un *debito* od un *credito;* per un tempo, di essere *passato* o *futuro;* per una lunghezza, di essere misurata *verso destra* o *verso sinistra*, ecc.), per rappresentare queste *qualità* sono sufficienti *due* soli segni. Si convenne che fossero il segno + che si chiama *segno positivo* (e si legge *più*), ed il segno — che si chiama *segno negativo* (e si legge *meno*). Essi si premettono al numero a cui si riferiscono. * Uno di essi p.e. il + può rappresentare indifferentemente *una* delle due *qualità;* il — rappresenterà l'*altra*. **

Converremo dunque di scrivere la successione precedente così:

$$\ldots\ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4, \ldots\ldots$$

18. DEFINIZIONI. Diconsi *numeri con segno* i numeri preceduti da segno. I numeri con segno si dicono *positivi* se sono preceduti dal segno +; *negativi* se sono preceduti dal segno —. ***

* Non si confondano i segni +, — indicanti *positivo, negativo*, coi segni +, — indicanti *operazione più, operazione meno*. Nel 1° caso si *premettono* al numero; nel 2° si *pospongono*. Es. +4 significa *il numero positivo* 4; invece 4+ significa *che su 4 si fa l'operazione più*.

** In ogni problema intorno a grandezze, una data *qualità* della grandezza che si studia, si può rappresentare indifferentemente col segno + o col —. Perciò, al principio di ogni quesito, bisogna dichiarare *esplicitamente* quale delle due *qualità* opposte si vuole rappresentare col + e quale col —, e conservare poi a ciascun segno il medesimo significato durante tutta la trattazione della questione. Ordinariamente si suole rappresentare col + la *qualità* che deve avere la grandezza cercata. Perciò se la domanda è: *Quante lire ho guadagnato?* si suole rappresentare la *qualità* di essere *guadagno* col + e la *qualità* di essere *perdita* col —. Se invece la domanda è: *Quante lire ho perduto?* si suole rappresentare la *qualità* di essere *perdita* col +, e la *qualità* di essere *guadagno* col —.

*** Lo 0 è il numero che separa i numeri *positivi* dai *negativi*. Esso non ha segno. Il segno + davanti ad un numero positivo sovente si omette; sarà perciò la stessa cosa scrivere +5 o 5; scrivere $+a$ od a. Il segno — non si omette mai.

Diconsi *numeri aritmetici* i numeri non preceduti da segno. *

Dicesi *valore numerico* di un numero con segno il valore che il numero ha non tenendo conto del segno. **

Dicesi *valore algebrico* di un numero con segno il valore che il numero ha tenendo conto anche del segno.

Esempio. Nei numeri $+4$, $+a$, -7, $-b$ i valori numerici sono rispettivamente 4, a, 7, b; gli algebrici sono $+4$, $+a$, -7, $-b$.

Diconsi *opposti*, o *contrari*, due numeri con segno aventi valore numerico eguale e segno contrario.

Esempio. Sono opposti i numeri $+4$ e -4, $+a$ e $-a$, ecc.

Due numeri con segno si dicono *eguali* se hanno egual valore numerico ed egual segno; altrimenti si dicono *disuguali*.

Esempio. Sono eguali $+2$ e $+^{10}/_5$; sono eguali -3 e $-^6/_2$. Sono disuguali $+3$ e -3; così pure -2 e -3; così pure $+3$ e $+5$; così pure $+3$ e -4.

19. All'insieme dei numeri interi con segno scritti nell'ordine

(α).....-5, -4, -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$.....

daremo, per comodità, il nome di *successione naturale dei numeri con segno;* e diremo che 0 è il successivo di -1; che -1 è il successivo di -2; che -2 è il successivo di -3; ecc. Ne segue che:

Ogni numero con segno ha il successivo ed il precedente.

Si sa dall'Aritmetica che ogni numero della successione naturale dei numeri interi 0, 1, 2, 3, 4, 5,..... è *maggiore* di ciascuno dei numeri che ha alla sua sinistra, e *minore* di ciascuno dei numeri che ha alla sua destra; e noi estenderemo *per convenzione* questa proprietà anche ai numeri della successione naturale dei numeri con segno. ***

Da questa convenzione deriva immediatamente:

1°. Ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo, e minore anche di 0.

---

* I numeri dell'Algebra invece sono i numeri *positivi* ed i *negativi;* li abbiamo tuttavia chiamati *numeri con segno* e non *numeri algebrici*, perchè all'espressione *numero algebrico* si è dato un significato diverso da quello di *numero con segno*. I numeri positivi e negativi compaiono per la prima volta in Diofanto di Alessandria, il quale chiamava i primi *numeri che si aggiungono*, chiamava i secondi *numeri che si tolgono.*

Nelle opere del matematico indiano Âryabhaṭṭa, nato a Pâtaliputra (oggi Patna) nel 476 e morto verso il 550, si trovano per la prima volta i numeri positivi e negativi considerati come esprimenti *avere*, *debito*, lunghezze *verso destra* o *verso sinistra*. Nel secolo XIII i Cinesi scrivevano i numeri positivi in rosso, i negativi in nero. Gli Indiani distinguevano i positivi dai negativi ponendo un punto sopra i negativi.

** Sono sinonime le espressioni *valore numerico*, *valore assoluto*, *valore aritmetico*.

*** Questa convenzione fu posta per la prima volta da Michele Stifel (matematico tedesco, nato in Esslingen nel 1486 o nel 1487, e morto a Jena nel 1567) nella sua *Arithmetica integra*, stampata a Nürnberg nel 1514.

2°. Lo 0 è minore di ogni numero positivo, ma maggiore di ogni numero negativo. *

3°. Di due numeri negativi è maggiore quello il cui valore aritmetico è minore.

4°. Dati due numeri con segno a, b, dovrà sempre verificarsi uno ed uno solo dei tre seguenti casi: $a>b$; $a=b$; $a<b$.

La differenza fra l'Aritmetica e l'Algebra consiste in questo che, oggetto dell'Aritmetica sono i numeri senza segno; mentre l'Algebra studia anche i numeri con segno. **

L'OPERAZIONE PIÙ DEI NUMERI CON SEGNO.

20. DEFINIZIONE 1ª. Ogni numero della successione naturale dei numeri con segno si dice *il successivo* di quello che gli sta immediatamente a sinistra.

Esempio. —3 è il successivo di —4; 0 è il successivo di —1; +2 è il successivo di +1; ecc.

DEFINIZIONE 2ª. L'operazione *più* dei numeri con segno è l'operazione per cui si passa da un numero con segno al successivo.

Si rappresenta scrivendo il segno + a destra del numero dato.

COROLLARIO. Fare sopra un numero con segno l'operazione *più*, significa passare da questo numero al successivo.

Esempio. —5+ significa che su —5 si fa l'operazione ***più***, cioè si passa da —5 al successivo che è —4. Similmente +2+ significa che su +2 si fa l'operazione ***più***, cioè si passa da +2 al successivo che è +3.

DEFINIZIONE 3ª. Fare sul numero $\pm a$ l'operazione *più* b volte, significa fare sul numero $\pm a$ l'operazione *più;* sul risultato fare l'operazione *più;* sul nuovo risultato fare l'operazione *più;* ecc. b volte. ***

---

* Queste convenzioni non hanno nulla di strano, e si possono far concordare colla realtà delle cose. Infatti: posto p.e. che un numero ***positivo*** rappresenti ***avere*** (somma posseduta), e che un numero ***negativo*** rappresenti ***debito***, è chiaro che colui che ha debiti, è più povero di chi non possiede nulla, ma non ha debiti. Di due poi che abbiano debiti, è più povero colui il cui debito ha valore numerico maggiore. Riferendoci ai gradi di temperatura, e chiamando ***positivi*** i gradi ***sopra zero***, e ***negativi*** quelli ***sotto zero***, è chiaro che è ***minore*** (più bassa) la temperatura quando il termometro segna gradi ***sotto zero***, di quando segna gradi ***sopra zero***, ed anche di quando segna ***zero***. E quando segna gradi ***negativi*** (sotto zero) è tanto ***minore*** (più bassa) la temperatura, quanto più ***grande*** è il valore numerico dei gradi segnati dal termometro.

** In questo capitolo, parlando dei numeri con segno, abbiamo considerato (per semplicità di esposizione) i soli numeri interi; però i ragionamenti fatti sono d'indole generale, e si possono applicare anche ai numeri con segno frazionari, come si può vedere nel libro: Nassò - *Algebra Elementare ad uso dei Licei*, nota *** § 19.

*** Si scrive $\pm a$ per indicare che i ragionamenti che si fanno si riferiscono tanto al numero $+a$ quanto al numero $-a$. La scrittura $\pm a$ si legge ***più o meno a***.

§ 20

Si indica scrivendo $\pm a+b$; e se m è il numero a cui si arriva, scriveremo $\pm a+b=m$.

Esempio. Fare su —2 l'operazione +3, significa fare su —2 l'operazione *più*, cioè passare da —2 al successivo che è —1; poi fare su —1 l'operazione *più*, cioè passare da —1 al successivo che è 0; poi fare su 0 l'operazione *più*, cioè passare da 0 al successivo che è +1. Il numero +1 è il risultato cercato; e scriveremo $-2+3=+1$.

DEFINIZIONE 4ª. Fare sul numero $\pm a$ l'operazione *più* zero volte significa non fare su $\pm a$ alcuna operazione. Ne segue:

COROLLARIO. $\pm a+0=\pm a$.

L'OPERAZIONE MENO DEI NUMERI CON SEGNO.

21. DEFINIZIONE 1ª. Ogni numero della successione naturale dei numeri con segno si dice *il precedente* di quello che gli sta immediatamente a destra.

Esempio. —3 è il precedente di —2; 0 è il precedente di +1; +2 è il precedente di +3; ecc.

DEFINIZIONE 2ª. L'operazione *meno* dei numeri con segno è l'operazione per cui si passa da un numero con segno al precedente.

Si rappresenta scrivendo il segno — a destra del numero dato.

COROLLARIO. Fare sopra un numero con segno l'operazione *meno*, significa passare da questo numero al precedente.

Esempio. —5— significa che su —5 si fa l'operazione *meno*, ossia si passa da —5 al precedente che è —6; +2— significa che su +2 si fa l'operazione *meno*, ossia si passa da +2 al precedente che è +1.

DEFINIZIONE 3ª. Fare sul numero $\pm a$ l'operazione *meno* b volte, significa fare sul numero $\pm a$ l'operazione *meno*; sul risultato fare l'operazione *meno*; sul nuovo risultato fare l'operazione *meno*; ecc. b volte.

Si indica scrivendo $\pm a-b$; e se m è il numero a cui si arriva, scriveremo $\pm a-b=m$.

Esempio. Fare su +1 l'operazione —3, significa fare su +1 l'operazione *meno*, cioè passare dal numero +1 al precedente che è 0; poi fare su 0 l'operazione *meno*, cioè passare da 0 al precedente che è —1; poi fare su —1 l'operazione *meno*, cioè passare da —1 al precedente che è —2. Il numero —2 è il risultato cercato; e scriveremo $+1-3=-2$.

DEFINIZIONE 4ª. Fare sul numero $\pm a$ l'operazione *meno* zero volte, significa non fare su $\pm a$ alcuna operazione. Ne segue:

COROLLARIO. $\pm a-0=\pm a$.

CAPO SECONDO.

Addizione.

22. DEFINIZIONE 1ª. Dicesi *somma* del numero $\pm a$ e del numero $\pm b$ il numero che si ottiene facendo sopra $\pm a$ l'operazione $\pm b$.

DEFINIZIONE 2ª. Dicesi *somma* dei numeri $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, ecc. il numero al quale si arriva facendo prima sopra $\pm a$ l'operazione $\pm b$; poi sul risultato l'operazione $\pm c$; poi sul nuovo risultato l'operazione $\pm d$; ecc. *

DEFINIZIONE 3ª. *L'addizione algebrica* è l'operazione per cui, dati due o più numeri con segno, se ne trova la somma.

Osservazione. Poichè sommare a con $\pm b$ significa fare su a l'operazione $\pm b$, la quale si indica scrivendo $a \pm b$, per indicare p.e. che si somma $+a$ con $+b$ basterà scrivere $+a+b$; per indicare che si somma $+a$ con $-b$ basterà scrivere $+a-b$, ecc.; per indicare che si sommano $-a$, $+b$, $-c$, $-d$, basterà scrivere $-a+b-c-d$. Ed in generale, *per indicare che si sommano due o più numeri con segno, basterà scriverli per ordine, uno alla destra dell'altro, col proprio segno.*

E poi importante osservare che le espressioni $+a-b$, $-a+b-c-d$, ecc. rappresentano indifferentemente: 1° *l'indicazione delle operazioni da eseguirsi;* 2° *il numero che si ottiene per risultato finale.*

23. La somma algebrica di due numeri con segno può presentare i quattro seguenti casi: $+a+b$, $-a-b$, $+a-b$, $-a+b$, che esamineremo partitamente. **

1° CASO: $+a+b$. Bisogna fare sopra $+a$ (che è alla destra di 0) l'operazione $+b$, la quale ci porta ad un numero alla destra di $+a$, e quindi anche alla destra di 0. Esso sarà la somma cercata; e sarà positivo perchè alla destra di 0, ed il suo valore numerico sarà eguale alla somma dei valori numerici degli addendi.

---

* Invece di dire che al numero $\pm a$ si aggiunge $\pm b$, al risultato si aggiunge $\pm c$, al nuovo risultato si aggiunge $\pm d$, ecc. si suole dire che *al numero* $\pm a$ *si aggiungono successivamente* $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, *ecc.*

** Per indicare che al numero positivo a aggiungo il numero positivo b, basta scrivere $+a+b$. Però talvolta si rappresenta la parola *aggiungo* col segno $+$; ed allora per non confondere il segno $+$ che significa *aggiungo* col segno $+$ di $+a$ e di $+b$ che significa *positivo*, si scrive $(+a)+(+b)$. Analogamente per gli altri casi. Avremo quindi *per convenzione* le eguaglianze:

$$(+a)+(+b)=+a+b; \qquad (-a)+(-b)=-a-b;$$
$$(+a)+(-b)=+a-b; \qquad (-a)+(+b)=-a+b.$$

Esprimiamo il valore della somma scrivendo $+(a+b)$; ove $(a+b)$ rappresenta la somma dei valori numerici degli addendi, ed il segno $+$ posto avanti alla parentesi, indica che questa somma è positiva.

Avremo quindi: $+a+b=+(a+b)$.

Osservazione. 5 lire di *guadagno* più 2 lire di *guadagno* dánno 5+2 lire di *guadagno;* ossia, se + rappresenta *guadagno,* e — *perdita,* avremo: $+5+2=+(5+2)=+7$.

2° CASO. $-a-b$. Bisogna fare sopra $-a$ (che è alla sinistra di 0) l'operazione $-b$, la quale ci porta ad un numero alla sinistra di $-a$, e quindi anche alla sinistra di 0. Esso sarà la somma cercata; e sarà negativo perchè alla sinistra di 0, ed il suo valore numerico sarà eguale alla somma dei valori numerici degli addendi.

Esprimiamo il valore della somma scrivendo $-(a+b)$; ove $(a+b)$ rappresenta la somma dei valori numerici degli addendi, ed il segno — posto avanti alla parentesi, indica che questa somma è negativa.

Avremo quindi: $-a-b=-(a+b)$.

Osservazione. 5 lire di *perdita* più 2 lire di *perdita* dánno 5+2 lire di *perdita;* ossia se + rappresenta *guadagno*, e — *perdita*, avremo: $-5-2=-(5+2)=-7$.

3° CASO. $+a-b$. Bisogna fare sopra $+a$ (che è alla destra di 0) l'operazione $-b$, la quale ci porta ad un numero alla sinistra di $+a$. Questo numero sarà la somma cercata. Esso sarà alla destra di 0 (ossia sarà positivo), se il valore numerico di $+a$ è maggiore del valore numerico di $-b$; sarà 0 se il valore numerico di $+a$ è eguale al valore numerico di $-b$; sarà alla sinistra di 0 (ossia sarà negativo), se il valore numerico di $+a$ è minore del valore numerico di $-b$.

In ogni caso però il valore numerico della somma sarà la differenza dei valori numeri degli addendi, come si vede nei seguenti esempi:

1°. Si abbia $+5-2$. Si fa sopra $+5$ l'operazione -2, e si arriva al numero $+3$; ed è appunto 3 la differenza dei valori numerici 5 e 2.

2°. Si abbia $+5-5$. Si fa sopra $+5$ l'operazione -5, e si arriva allo 0; ed è appunto 0 la differenza dei valori numerici 5 e 5.

3°. Si abbia $+2-5$. Si fa sopra $+2$ l'operazione -5, e si arriva al numero -3; ed è appunto 3 la differenza dei valori numerici 2 e 5.

Nella 1ª e nella 2ª ipotesi la somma si può rappresentare con $+(a-b)$, e nella 3ª ipotesi con $-(b-a)$. Avremo quindi:

$$+a-b=+(a-b), \quad \text{oppure:} \quad +a-b=-(b-a).$$

Osservazione. 5 lire di *guadagno* più 2 lire di *perdita* dánno $5-2=3$ lire di *guadagno.* Poi 2 lire di *guadagno* più 5 lire di *perdita* dánno $5-2=3$ lire di *perdita.* Ossia, se + rappresenta *guadagno*, e — *perdita*, avremo appunto $+5-2=+(5-2)=+3$; e $+2-5=-(5-2)=-3$.

4° CASO. $-a+b$. Bisogna fare sopra $-a$ (che è alla sinistra di 0)

l'operazione $+b$, la quale ci porta ad un numero alla destra di $-a$. Questo numero sarà la somma cercata. Esso sarà alla sinistra di 0 (ossia negativo), se il valore numerico di $-a$ è maggiore del valore numerico di $+b$; sarà 0 se il valore numerico di $-a$ è eguale al valore numerico di $+b$; sarà alla destra di 0 (ossia positivo), se il valore numerico di $-a$ è minore del valore numerico di $+b$.

In ogni caso però il valore numerico della somma sarà la differenza dei valori numerici degli addendi, come si vede nei seguenti esempi:

1°. Si abbia $-5+2$. Si fa sopra -5 l'operazione $+2$, e si arriva al numero -3; ed è appunto 3 la differenza dei valori numerici 5 e 2.

2°. Si abbia $-5+5$. Si fa sopra -5 l'operazione $+5$, e si arriva allo 0; ed è appunto 0 la differenza dei valori numerici 5 e 5.

3°. Si abbia $-2+5$. Si fa sopra -2 l'operazione $+5$, e si arriva al numero $+3$; ed è appunto 3 la differenza dei valori numerici 2 e 5.

Nella 1ª e nella 2ª ipotesi la somma si può rappresentare con $-(a-b)$; e nella 3ª ipotesi con $+(b-a)$. Avremo quindi:

$$-a+b=-(a-b), \quad \text{oppure:} \quad -a+b=+(b-a).$$

Osservazione. 5 lire di *perdita* più 2 lire di *guadagno* dánno $5-2=3$ lire di *perdita*. E poi 2 lire di *perdita* più 5 lire di *guadagno* dánno $5-2=3$ lire di *guadagno*. Ossia, se $+$ rappresenta *guadagno*, e $-$ *perdita* avremo: $-5+2=-(5-2)=-3$; e $-2+5=+(5-2)=+3$.

Riassumendo avremo:

$$+a+b=+(a+b); \qquad +a-b=+(a-b) \quad \text{oppure} \quad =-(b-a);$$
$$-a-b=-(a+b); \qquad -a+b=-(a-b) \quad \text{oppure} \quad =+(b-a).$$

24. Il contenuto del § 23 si può riassumere nella seguente regola:

REGOLA. 1°. La somma di più numeri con segno si indica scrivendo i numeri, per ordine, uno alla destra dell'altro col proprio segno.

2°. La somma di due numeri del medesimo segno ha per valore numerico la somma dei valori numerici degli addendi, e per segno il segno degli addendi.

3°. La somma di due numeri di segno contrario ha per valore numerico la differenza fra il maggiore ed il minore dei valori numerici degli addendi; e per segno, il segno di quell'addendo il cui valore numerico è maggiore. *

25. Dalla definizione dell'addizione algebrica e dalla regola precedente derivano immediatamente i seguenti corollari:

COROLLARIO 1°. La somma di più numeri del medesimo segno ha per valore numerico la somma dei valori numerici degli addendi, e per segno il segno degli addendi.

* Così definita, la somma algebrica di due numeri con segno non porta più necessariamente con sè l'idea di aumento, perchè il valore numerico della somma non è sempre eguale alla somma dei valori numerici degli addendi.

COROLLARIO 2°. La somma di due numeri contrari è zero. E viceversa: Se la somma di due numeri con segno è zero, i due numeri sono contrari.

COROLLARIO 3°. $P+a-a=P;$ $\quad P-a+a=P.$ *

Ossia: facendo sul numero P l'operazione $+a$, e poi sul risultato l'operazione $-a$, si ritorna al numero P; cioè $P+a-a=P$.

Similmente, facendo sul numero P l'operazione $-a$, e poi sul risultato l'operazione $+a$, si ritorna al numero P; cioè $P-a+a=P$.

COROLLARIO 4°. $P+a+b+c+d=P+(a+b+c+d)$.

Ossia: se si fa sul numero P l'operazione $+a$, poi sul risultato l'operazione $+b$, poi sul nuovo risultato l'operazione $+c$, poi sul nuovo risultato l'operazione $+d$, si arriva al medesimo numero al quale si giunge facendo sul numero P l'operazione *più* $(a+b+c+d)$ volte. **

Analogamente si ha:

$$P-a-b-c-d=P-(a+b+c+d). \ ***$$

26. DEFINIZIONE. In una somma di quanti si voglia numeri con segno non s' introduce modificazione alcuna chiudendo in parentesi i primi due, tre, quattro, ecc. termini.

Esempio. $a-b+c-d-e+f=(a-b)+c-d-e+f=$
$=(a-b+c)-d-e+f=(a-b+c-d)-e+f=$
$=(a-b+c-d-e)+f.$

27. TEOREMA 1°. In una somma algebrica di più termini si può invertire l'ordine dei due ultimi.

DIMOSTRAZIONE. *Rappresentiamo, per brevità, con P (che potrà essere positivo o negativo) la somma algebrica di tutti i termini che precedono i due ultimi. Distingueremo due casi:*

1° Caso. *I due termini sono dello stesso segno.*

La somma data avrà la forma $P+a+b$, oppure $P-a-b$; e pel

---

* Il segno $+$ davanti al primo addendo d'una somma si suole sottintendere. Sarà quindi la stessa cosa scrivere $P+a-b$ e scrivere $+P+a-b$.

** I due segni ( ) diconsi *parentesi*, e significano che si suppongono eseguite tutte le operazioni indicate sui numeri che sono posti fra i due segni. Ne segue che tutto ciò che è posto tra i due segni ( ) *rappresenta un numero unico*, cioè il numero che si ottiene per risultato finale eseguendo tutte le operazioni indicate sui numeri posti fra i due segni di parentesi.

ESEMPIO. $10+(2+3+1)$ significa che si è già eseguita l'operazione $2+3+1$, e che il risultato (cioè 6) si deve aggiungere al numero 10; mentre invece $10+2+3+1$ significa che a 10 si deve aggiungere 2, al risultato aggiungere 3, ed al risultato aggiungere 1.

Si suole far uso di parentesi di varie forme, come p.e ( ), [ ], { }. Le prime si dicono *parentesi tonde*, le seconde *parentesi quadre*, le terze *graffe*. Esse però hanno tutte il medesimo significato; ed è affatto indifferente far uso di una o di un'altra forma di parentesi.

*** Questo corollario si può ammettere come evidente. Volendo dimostrarlo, si può seguire la via indicata nella nota *** del § 26 dell'*Algebra Elementare ad uso dei Licei.*

coroll. 4° § 25, la potremo scrivere $P+(a+b)$, oppure $P-(a+b)$. E poichè per due numeri aritmetici, in aritmetica si dimostra che è $a+b=$ $=b+a$, la somma si potrà scrivere $P+(b+a)$, oppure $P-(b+a)$. E di nuovo, pel medesimo corollario, potremo togliere la parentesi, ed avremo: $P+b+a$ oppure $P-b-a$. Sarà adunque:

$$P+a+b=P+(a+b)=P+(b+a)=P+b+a.$$
$$P-a-b=P-(a+b)=P-(b+a)=P-b-a.$$

2° Caso. I due ultimi termini sono di segno contrario.

Basta scomporre il termine che ha valore numerico maggiore in due parti, di cui una sia eguale al valore numerico dell'altro termine. Ragionando come nel 1° caso, e ricordando i coroll. 3° e 4°, § 25, si ha:

$$P+5-3=P+(2+3)-3=P+2+3-3=P+2.$$
$$P-3+5=P-3+(3+2)=P-3+3+2=P+2.$$

Dunque $P+5-3=P-3+5$.

Ed in generale: $P+a-b=P-b+a$. *

28. TEOREMA 2°. In una somma algebrica di più termini si possono scambiare di posto due termini consecutivi qualsiasi.

Dico p.e. che si avrà: $a+b+c-d+e-f=a+b-d+c+e-f$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teor. prec. si ha: $a+b+c-d=a+b-d+c$; ed aggiungendo ad ambi i membri prima $+e$ e poi $-f$, si ottiene: ** $a+b+c-d+e-f=a+b-d+c+e-f$.

Osservazione. Se i termini consecutivi da scambiare di posto sono i due primi, si fa la medesima dimostrazione, supponendo di avere $0+a+b+c-d+e-f$, invece di $a+b+c-d+e-f$.

29. TEOREMA 3°. Una somma algebrica di più addendi è indipendente dall'ordine degli addendi. *(Legge commutativa).*

Dico p.e. che si ha: $a+b-c-d+e=-d+a-c+e+b$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teor. preced. si passa dal 1° al 2° membro dell'eguaglianza con scambi successivi di due addendi consecutivi.

30. Dal teor. 3° si ricavano assai facilmente, e con dimostrazioni analoghe a quelle date in Aritmetica, varie proprietà dell'addizione algebrica, tra le quali ricordiamo le due seguenti:

COROLLARIO 1°. Per aggiungere ad un numero una somma algebrica, basta aggiungere al numero successivamente ciascun addendo della somma. *(Legge associativa).*

Sia p. e. il numero P al quale si vuole aggiungere la somma

---

* Se il termine il cui valore numerico è maggiore fosse negativo, si avrebbe p.e.:

$$P-5+3=P-(2+3)+3=P-2-3+3=P-2.$$
$$P+3-5=P+3-(3+2)=P+3-3-2=P-2.$$ Da cui:
$$P-5+3=P+3-5.$$

** Perchè due numeri eguali aumentati del medesimo numero danno somme eguali.

$-a-b+c-d$; *dico che basta aggiungere a* P *successivamente* $-a$, $-b$, $+c$, $-d$.

Dico cioè che sarà: $P+(-a-b+c-d)=P-a-b+c-d$.

Infatti: Pel teor. 4° e per la definiz. del § 26, si ha successivamente:

$$P+(-a-b+c-d)=(-a-b+c-d)+P=-a-b+c-d+P=$$
$$=P-a-b+c-d.$$

Analogamente si avrebbe: $P+(a-b+c)=P+a-b+c$.

COROLLARIO 2°. In una somma di più addendi si possono sommare gli addendi per gruppi in un ordine qualsiasi, e poi sommare insieme i risultati. *(Legge associativa.)*

Dico p. e. che si ha:

$$+a-b+c-d+e-f+g=(g-d)+(a-f+c)+(-b+e).$$

Infatti: cambiando opportunamente l'ordine degli addendi, e facendo uso della definizione del § 26, si ha successivamente:

$+a-b+c-d+e-f+g$	$=$	$g-d+a-f+c-b+e=$
per la definiz. del § 26	$=$	$(g-d)+a-f+c-b+e=$
e pel teor. preced.	$=$	$a-f+c+(g-d)-b+e=$
e per la definiz. del § 26	$=$	$(a-f+c)+(g-d)-b+e=$
e pel teor. preced.	$=$	$-b+e+(a-f+c)+(g-d)=$
e per la definiz. del § 26	$=$	$(-b+e)+(a-f+c)+(g-d)=$
e pel teor. preced.	$=$	$(g-d)+(a-f+c)+(-b+e)$. *

* Poichè la somma dei numeri $+a$, $-b$, $+c$ si indica scrivendo $+a-b+c$, la scrittura $+a-b+c$ si può leggere così: *al numero positivo a aggiungo il numero negativo b, ed al risultato aggiungo il numero positivo c.* Considerando $+a-b+c$ sotto questo aspetto, si vede che, fra un numero e l'altro, vi è sottintesa la parola *aggiungo*; e che i segni $+$, $-$ significano rispettivamente *positivo*, *negativo*.

Ma poichè al numero $+a$ aggiungere $-b$ significa fare su $+a$ l'operazione $-b$, il che si indica anche scrivendo $+a-b$, ecc. la scrittura $+a-b+c$ si può anche leggere così: *sopra* $+a$ *faccio l'operazione* $-b$, *e sul risultato faccio l'operazione* $+c$. Considerando $+a-b+c$ sotto questo aspetto, i segni $+$ e $-$ che seguono il 1° termine sono, rispettivamente, i segni dell'operazione *più* e dell'operazione *meno*. Il segno che precede il 1° termine significa *positivo*, *negativo*.

Si scorge subito che $+a-b+c$ si può leggere indifferentemente nell'uno o nell'altro dei due modi sopradetti. Analogamente si dirà di ogni altra somma algebrica i cui addendi non sono essi stessi somme algebriche.

Invece nelle scritture $P+(a-b+c)$ e $P+(-a-b+c)$ il segno $+$ che precede la parentesi significa, che *al numero P si aggiunge il numero* $a-b+c$, oppure il numero $-a-b+c$; e quindi questo segno $+$ significa *si aggiunge*. Analogamente si dirà di ogni altro caso in cui un addendo d'una somma è esso stesso una somma.

CAPO TERZO.

Sottrazione.

31. DEFINIZIONE. Dicesi *differenza* di due numeri con segno un terzo numero con segno che, sommato col secondo, riproduce il primo. Il primo numero si chiama *minuendo*, il secondo *sottraendo*.

DEFINIZIONE. La *sottrazione algebrica* è quell'operazione per cui, dati due numeri con segno, se ne trova la differenza.

32. TEOREMA 1°. La differenza di due numeri con segno è eguale alla somma del primo numero e del contrario del secondo.

Siano p.e. i due numeri $+a$ *e* $+b$*; dico che la loro differenza è* $+a-b$*. Avrò dimostrato il teorema se dimostro che aggiungendo al numero* $+a-b$ *il sottraendo* $+b$*, si ottiene il minuendo* $+a$.

DIMOSTRAZIONE. Pel coroll. 3° § 25, si ha: $+a-b+b=+a$. Dunque la differenza dei numeri $+a$ e $+b$ è $+a-b$. Analogamente si trova che » $+a$ e $-b$ è $+a+b$. »
» » $-a$ e $+b$ è $-a-b$. »
» » $-a$ e $-b$ è $-a+b$. *

Poichè per sommare due numeri con segno basta scriverli uno alla destra dell'altro col proprio segno, avremo la seguente regola:

REGOLA. Per sottrarre da un numero con segno un altro numero con segno, basta scrivere, a destra del primo numero, il contrario del secondo.

33. DEFINIZIONE. Da un numero con segno sottrarne successivamente parecchi altri, significa: dal 1° numero sottrarre il 2°, dal risultato sottrarre il 3°, dal nuovo risultato sottrarre il 4°, ecc.

---

* Per indicare che da $+a$ si sottrae $-b$, si scrive anche: $(+a)-(-b)$. Per indicare che da $-a$ si sottrae $+b$, si scrive anche: $(-a)-(+b)$. Analogamente per gli altri casi. L'enunciato del teorema si può quindi esprimere così:

$$(+a)-(+b)=+a-b; \qquad (-a)-(+b)=-a-b;$$
$$(+a)-(-b)=+a+b; \qquad (-a)-(-b)=-a+b.$$

È da notare che, in questi casi, i segni $+$, $-$, chiusi in parentesi, significano rispettivamente *positivo*, *negativo*; ed il segno — che precede la parentesi significa *si sottrae*. Cfr. la nota ** § 23. Così definita, la sottrazione non porta più con sè necessariamente l'idea di diminuzione, come succede in Aritmetica. Il valore numerico del resto può essere maggiore o minore del valore numerico del minuendo; perciò la denominazione di *minuendo* che in Aritmetica era esatta, in Algebra non ha più ragione di esistere. La si conserva tuttavia per uniformità di linguaggio. È poi facile vedere che, quando i numeri dati sono tutti positivi, ed il minuendo non è minore del sottraendo, l'addizione e la sottrazione algebrica coincidono, se si prescinde dal segno, rispettivamente coll'addizione e colla sottrazione aritmetica.

Dalla regola precedente si ricava immediatamente che basta a destra del 1° numero scrivere il contrario del 2°, a destra del 2° scrivere il contrario del 3°, a destra del 3° scrivere il contrario del 4°, ecc.

Esempio. Per sottrarre da a successivamente $-b$, $-c$, $+d$, $-e$, basta scrivere $a+b+c-d+e$.

34. TEOREMA 2°. Per sottrarre da un numero una somma, basta, alla destra del numero, scrivere, uno dopo l'altro, col segno cambiato, gli addendi della somma.

Da P (che può anche essere una somma) si voglia sottrarre la somma $-a+b-c+d$. Dico che il resto sarà $P+a-b+c-d$; ossia:

$$P-(-a+b-c+d)=P+a-b+c-d.$$

DIMOSTRAZIONE. Avrò dimostrato che $P+a-b+c-d$ è il resto cercato, se dimostro che, sommato col sottraendo $-a+b-c+d$, dà per risultato il minuendo P.

Eseguendo l'addizione, abbiamo:

$(P+a-b+c-d)+(-a+b-c+d)=$ pei §§ 26 e 24,

$=P+a-b+c-d-a+b-c+d=$ pel § 29, e pel coroll. 3° § 25,

$=P+a-a-b+b+c-c-d+d=P.$

Dunque $P+a-b+c-d$ è il resto cercato.

Analogamente si avrebbe: $P-(a+b-c)=P-a-b+c$. *

Esempio. *Da* $-2+5-3$ *si sottragga* $4+6-7$. Avremo:

$(-2+5-3)-(+4+6-7)=-2+5-3-4-6+7=-3.$

SULL'USO DELLE PARENTESI NELL'ADDIZIONE
E NELLA SOTTRAZIONE.

35. Se, nelle eguaglianze dimostrate dal coroll. 1° § 30 e dal teor. 2° § 34, scriviamo esplicitamente il segno $+$ davanti al primo termine chiuso entro parentesi, esse si potranno trascrivere così:

(1)..........$P+(+a-b-c+d)=P+a-b-c+d$

(2)..........$P+(-a+b-c+d)=P-a+b-c+d$

(3)..........$P-(+a-b-c+d)=P-a+b+c-d$

(4)..........$P-(-a+b-c+d)=P+a-b+c-d$. **

---

* Se il numero P è esso stesso una somma, il teorema precedente si può enunciare così: ***TEOREMA. Per sottrarre una somma da una somma, basta, in seguito alla somma minuendo, scrivere, uno dopo l'altro, col segno cambiato, i termini della somma sottraendo.***

** Ricordiamo che i segni $+$, $-$, che precedono ciascuna parentesi, significano rispettivamente ***si aggiunge, si toglie.*** Si noti poi che, quando il 1° termine chiuso entro parentesi è positivo, si suole omettere il segno $+$ che lo precede. Perciò in luogo di scrivere p.e. $(+a-b+c)$, si scrive $(a-b+c)$. Il segno $-$ non si omette mai. Perciò non si potrà scrivere p.e. $(a-b+c)$ invece di $(-a-b+c)$.

Aggiungendo ai due membri di queste eguaglianze prima $+e$, e poi $-f$, otteniamo le quattro eguaglianze seguenti:

$$(1')\ldots\ldots P+(+a-b-c+d)+e-f=P+a-b-c+d+e-f$$
$$(2')\ldots\ldots P+(-a+b-c+d)+e-f=P-a+b-c+d+e-f$$
$$(3')\ldots\ldots P-(+a-b-c+d)+e-f=P-a+b+c-d+e-f$$
$$(4')\ldots\ldots P-(-a+b-c+d)+e-f=P+a-b+c-d+e-f.$$

Si vede subito che, in ciascuna di queste eguaglianze, si passa dal 1° al 2° membro sopprimendo la parentesi col segno da cui è preceduta; e non s'introduce alcun altro cambiamento, se la parentesi era preceduta dal segno $+$; si cambia invece il segno a tutti i termini che erano entro la parentesi, se questa era preceduta dal segno $-$.

Analogamente, si passa dal 2° al 1° membro di ciascuna eguaglianza chiudendo alcuni termini consecutivi (e quali si voglia) in parentesi senza introdurre alcun'altra mutazione, se la parentesi si fa precedere dal segno $+$; e cambiando invece il segno a tutti i termini che si chiudono in parentesi, se questa si fa precedere dal segno $-$.

Tutto ciò si suole esprimere concisamente colla seguente regola:

REGOLA. ***Una parentesi, racchiudente alcuni termini d'una somma algebrica, si può introdurre o sopprimere a piacimento, senza bisogno di altri cambiamenti, se la parentesi introdotta o soppressa è preceduta dal segno $+$; cambiando invece il segno a tutti i termini che saranno, o che erano chiusi entro parentesi, se questa è preceduta dal segno $-$.*** *

---

* Quando in una somma vi sono molte parentesi l'una dentro l'altra, e si devono togliere, si può (applicando la regola data) toglierle, una dopo l'altra, procedendo ordinatamente dalle esterne alle interne, oppure dalle interne alle esterne.

Esempio. *Si tolgano le parentesi nella somma* $a-\left[b+\left\{4-(d-e+f)+3-(x-y)\right\}\right]$.

Cominciando l'eliminazione dalle parentesi interne, avremo successivamente:

$$a-\left[b+\left\{4-(d-e+f)+3-(x-y)\right\}\right]=a-\left[b+\left\{4-(d-e+f)+3-x+y\right\}\right]=$$
$$=a-\left[b+\left\{4-d+e-f+3-x+y\right\}\right]=a-\left[b+4-d+e-f+3-x+y\right]=$$
$$=a-b-4+d-e+f-3+x-y.$$

Cominciando invece l'eliminazione dalle parentesi esterne, avremo successivamente:

$$a-\left[b+\left\{4-(d-e+f)+3-(x-y)\right\}\right]=a-b-\left\{4-(d-e+f)+3-(x-y)\right\}=$$
$$=a-b-4+(d-e+f)-3+(x-y)=a-b-4+d-e+f-3+(x-y)=$$
$$=a-b-4+d-e+f-3+x-y.$$

Quando si è già acquistato un po' di pratica, riesce più comoda e più rapida l'eliminazione delle parentesi con questo secondo metodo, piuttostochè col primo: e si può anche risparmiare la ripetuta trascrizione della somma, scrivendo subito il risultato finale.

Esempio. La somma $a-b+c+d-e+f$ si potrà p. e. scrivere così: $a-b+(c+d)-e+f$; oppure: $a-b-(-c-d+e)+f$; oppure: $a-(b-c)+(d-e)+f$.

Togliendo le parentesi nella somma $a+(b-c)-d-(e-f)-(g+h)$, essa prenderebbe la forma $a+b-c-d-e+f-g-h$. *

---

* Le parentesi, nella loro forma attuale, furono adoperate per la 1ª volta dal matematico olandese Alberto Girard (nato verso il 1590 e morto nel 1633) nella sua *Invention nouvelle en l'Algèbre*, pubblicata nel 1629. Forse esse non sono altro che una modificazione delle parentesi L J che il bolognese Raffaele Bombelli introdusse nel suo libro *L'Algebra*, pubblicato a Venezia nel 1572. Prima, invece di chiudere un'espressione in parentesi, si poneva, sopra o sotto di essa, un tratto orizzontale detto *vinculum*; e, nelle espressioni in cui occorrono varie parentesi una dentro l'altra, si ponevano vari tratti orizzontali uno sopra l'altro. Questa notazione è in uso ancora oggidì.

CAPO QUARTO.

Moltiplicazione e Potenza.

PRODOTTO DEI NUMERI CON SEGNO.

36. DEFINIZIONI. 1ª. Fare b volte sopra zero l'operazione $+a$, significa fare sopra zero l'operazione $+a$, poi sul risultato fare l'operazione $+a$, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $+a$, ecc. b volte.

Si rappresenta scrivendo $(+a)(+b)$, che si legge $+a$ *moltiplicato* $+b$.

Avremo quindi per definizione: $(+a)(+b) = +a+a+a+\ldots$ *b volte.*

2ª. Fare b volte sopra zero l'operazione $-a$, significa fare sopra zero l'operazione $-a$, poi sul risultato fare l'operazione $-a$, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $-a$, ecc. b volte.

Si rappresenta scrivendo $(-a)(+b)$, che si legge $-a$ *moltiplicato* $+b$.

Avremo quindi per definizione: $(-a)(+b) = -a-a-a-\ldots$ *b volte.*

3ª. Fare b volte sopra zero l'operazione $+a$ *invertita,* significa fare sopra zero l'operazione $+a$ *invertita,* poi sul risultato fare l'operazione $+a$ *invertita,* poi sul risultato fare l'operazione $+a$ *invertita,* ecc. b volte. *

Ossia significa fare sopra zero l'operazione $-a$, poi sul risultato fare l'operazione $-a$, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $-a$, ecc. b volte.

Si rappresenta scrivendo $(+a)(-b)$, che si legge $+a$ *moltiplicato* $-b$.

Avremo quindi per definizione: $(+a)(-b) = -a-a-a-\ldots$ *b volte.*

4ª. Fare b volte sopra zero l'operazione $-a$ *invertita,* significa fare sopra zero l'operazione $-a$ *invertita,* poi sul risultato fare l'operazione $-a$ *invertita,* poi sul nuovo risultato fare l'operazione $-a$ *invertita,* ecc. b volte.

Ossia significa fare sopra zero l'operazione $+a$, poi sul risultato fare l'operazione $+a$, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $+a$, ecc. b volte.

Si rappresenta scrivendo $(-a)(-b)$, che si legge $-a$ *moltiplicato* $-b$.

Avremo quindi per definizione: $(-a)(-b) = +a+a+a+\ldots$ *b volte.*

---

* Dalle definizioni di operazione *più* e di operazione *meno,* si scorge che l'operazione *più* è l'inversa dell'operazione *meno;* e l'operazione *meno* è l'inversa dell'operazione *più:* epperciò si suol dire che l'operazione *più* è l'operazione *meno invertita;* e che l'operazione *meno* è l'operazione *più invertita.* E quindi:

Fare l'operazione *più invertita,* **significa fare l'operazione** *meno.*
Fare l'operazione *meno invertita,* **significa fare l'operazione** *più.*
Fare l'operazione $+a$ *invertita,* **significa fare l'operazione** $-a$.
Fare l'operazione $-a$ *invertita,* **significa fare l'operazione** $+a$.

5ª. Dicesi *prodotto* del numero positivo $+a$ per il numero positivo $+b$, il numero che si ottiene facendo b volte sopra zero l'operazione $+a$.

6ª. Dicesi *prodotto* del numero negativo $-a$ pel numero positivo $+b$, il numero che si ottiene facendo b volte sopra zero l'operazione $-a$.

7ª. Dicesi *prodotto* del numero positivo $+a$ pel numero negativo $-b$, il numero che si ottiene facendo b volte sopra zero l'operazione $+a$ *invertita*.

8ª. Dicesi *prodotto* del numero negativo $-a$ pel numero negativo $-b$, il numero che si ottiene facendo b volte sopra zero l'operazione $-a$ *invertita*.

9ª. Dicesi *prodotto* di più numeri con segno il numero che si ottiene moltiplicando il 1° numero pel 2°, poi il prodotto ottenuto pel 3°, poi il nuovo prodotto ottenuto pel 4°, ecc. *

Il prodotto dei numeri $+a$, $+b$, $-c$, $+d$, $-e$, si indica scrivendo $(+a)(+b)(-c)(+d)(-e)$. I numeri dati si chiamano *i fattori del prodotto*. Quando il prodotto ha due soli fattori, il 1° si chiama *moltiplicando*, il 2° *moltiplicatore*.

10ª. La *moltiplicazione algebrica* è l'operazione per cui, dati due o più numeri con segno, se ne trova il prodotto.

11ª. Se $a, b, c, d, e,....$ sono numeri con segno, sarà la stessa cosa scrivere $abcde.....$, od $(ab)cde.....$, od $(abc)de.....$, od $(abcd)e.....$, ecc.

37. Il prodotto di due numeri con segno presenta i seguenti casi:

1° Caso. *Moltiplicando positivo e moltiplicatore positivo.*

Per la definizione 1ª § 36, è: $(+a)(+b)=+a+a+a+....{}_{b\ volte}=$
per il coroll. 1° § 25, $=+(ab)$. **

2° Caso. *Moltiplicando negativo e moltiplicatore positivo.*

Per la definizione 2ª § 36, è: $(-a)(+b)=-a-a-a-.....{}_{b\ volte}=$
per il coroll. 1° § 25, $=-(ab)$.

3° Caso. *Moltiplicando positivo e moltiplicatore negativo.*

Per la definizione 3ª § 36, è: $(+a)(-b)=-a-a-a-.....{}_{b\ volte}=$
per il coroll. 1° § 25, $=-(ab)$.

4° Caso. *Moltiplicando negativo e moltiplicatore negativo.*

Per la definizione 4ª § 36, è: $(-a)(-b)=+a+a+a+.....{}_{b\ volte}=$
per il coroll. 1° § 25, $=+(ab)$.

---

* Sono sinonime le espressioni *trovare il prodotto di a, b*, e *moltiplicare a per b*. Il segno × della moltiplicazione si trova per la 1ª volta nella *Clavis mathematica* del parroco inglese Guglielmo Oughtred (nato in Eton, contea di Buckingham, in Inghilterra, nel 1574, e morto nel 1660) stampata nel 1631. Fu Renato Descartes (nato a Lahaye, nella Turrena, nel 1596, e morto in Svezia nel 1650) che propose di mettere un punto tra un fattore e l'altro; e fu Michele Stifel (1486-1567) che suggerì di scrivere i fattori, uno a destra dell'altro, senza frapporvi alcun segno.

** La scrittura $+(ab)$ indica che il valore numerico del prodotto è ab, e che il prodotto è positivo. La scrittura $-(ab)$ indica che il valore numerico del prodotto è ab, e che il prodotto è negativo. Invece di $+(ab)$ e $-(ab)$, si suole scrivere semplicemente $+ab$ e $-ab$.

Riassumendo i quattro casi, abbiamo:

$(+a)(+b)=+ab;$ $\qquad$ $(+a)(-b)=-ab;$

$(-a)(+b)=-ab;$ $\qquad$ $(-a)(-b)=+ab.$ *

---

* Non è fuor di proposito far osservare ai principianti che la regola dei segni, nella moltiplicazione algebrica, non contraddice alla realtà delle cose. Si abbia p.e. un termometro. Sappiamo che i gradi *sopra zero* si sogliono scrivere preceduti dal segno +; e quelli *sotto zero*, preceduti dal segno —. Cosicchè per scrivere p.e. 3 gradi *sopra zero*, si scrive +3°; e 7 gradi *sotto zero*, si scrive —7°

Proponiamoci di risolvere il seguente problema.

Problema. *In un dato termometro l'altezza della colonna di mercurio varia (continuamente calando oppure continuamente salendo) di* 2 *gradi all'ora. A mezzodì il termometro segna* 0 *gradi. Quanti gradi segnerà in un tempo che è separato da mezzodì per un intervallo di* 4 *ore?*

Soluzione. Poichè l'altezza della colonna di mercurio varia di 2 gradi all'ora, in 4 ore varierà di gradi 2.4=8; e se a mezzodì segnava 0°, all'ora richiesta segnerà 8°. Il problema si risolve dunque eseguendo una moltiplicazione; e la risposta è che il termometro segnerà 8°. Resta solo a sapere se questi 8 gradi sono *positivi* o *negativi*. A tal fine conveniamo p.e. di chiamare *positivi* i gradi percorsi dalla estremità della colonna di mercurio *durante la salita*, e *negativi* quelli percorsi *durante la discesa*. Conveniamo ancora di chiamare *positive* le ore *pomeridiane*, e *negative* quelle *antimeridiane*. Risolviamo separatamente i quattro casi che si possono presentare.

1° Caso. *L'estremità della colonna del termometro sale di* 2 *gradi all'ora, ed a mezzogiorno segna* 0°. *Quanti gradi segnerà alle ore* 4 *dopo mezzogiorno?*

Soluzione. In questo caso i gradi sono percorsi *in salita*, e quindi avremo +2°. Le ore sono *pomeridiane*, e quindi avremo +4. Eseguendo la moltiplicazione algebrica, otteniamo: $(+2)(+4)=+8$.

Risposta. Il termometro segnerà +8°. Ed infatti: se l'estremità della colonna *sale* ed a mezzodì si trova *a zero*, dopo mezzodì si troverà *al di sopra di zero.*

2° Caso. *L'estremità della colonna del termometro sale di* 2 *gradi all'ora, ed a mezzogiorno segna* 0°. *Quanti gradi segnava* 4 *ore prima di mezzogiorno?*

Soluzione. In questo caso i gradi sono percorsi *in salita*, e quindi avremo +2°. Le ore sono *antimeridiane*, e quindi avremo —4. Eseguendo la moltiplicazione algebrica, otteniamo: $(+2)(-4)=-8$.

Risposta. Il termometro segnava —8°. Ed infatti: se la colonna *sale,* ed a mezzodì si trova *a zero*, prima di mezzodì si trovava *al disotto di zero.*

3° Caso. *L'estremità della colonna del termometro discende di* 2 *gradi all'ora, ed a mezzogiorno segna* 0°. *Quanti gradi segnerà alle ore* 4 *dopo mezzogiorno?*

Soluzione. In questo caso i gradi sono percorsi *in discesa*, e quindi avremo —2°. Le ore sono *pomeridiane*, e quindi avremo +4. Eseguendo la moltiplicazione algebrica, otteniamo: $(-2)(+4)=-8$.

Risposta. Il termometro segnerà —8°. Ed infatti: se l'estremità della colonna *discende*, ed a mezzodì si trova a *zero*, dopo mezzodì si troverà *al disotto di zero.*

4° Caso. *L'estremità della colonna del termometro discende di* 2 *gradi all'ora ed a mezzogiorno segna* 0°. *Quanti gradi segnava* 4 *ore prima di mezzogiorno?*

Soluzione. In questo caso i gradi sono percorsi *in discesa*, e quindi avremo —2°. Le ore sono *antimeridiane*, e quindi avremo —4. Eseguendo la moltiplicazione algebrica, abbiamo: $(-2)(-4)=+8$.

38. Da quanto precede si deduce la seguente regola:

***REGOLA.** 1°. Il prodotto di due numeri con segno è un numero positivo se i fattori sono dello stesso segno; negativo se i fattori sono di segno contrario.* *

2°. Il valore numerico del prodotto di due numeri con segno è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori.

COROLLARIO 1°. In un prodotto di due numeri con segno, se uno dei fattori è l'unità, il valore numerico del prodotto è eguale al valore numerico dell'altro fattore.

DIMOSTRAZIONE. Ciò deriva immediatamente dalla 2ª parte della regola precedente, e dal fatto che, in Aritmetica, se uno dei due fattori è l'unità, il prodotto è eguale all'altro fattore.

COROLLARIO 2°. In un prodotto di due numeri con segno, se uno dei fattori è zero, il prodotto è pure zero.

DIMOSTRAZIONE. $(\pm a)0$ significa che su 0 si fa l'operazione $\pm a$ 0 volte; ossia che su 0 non si fa alcuna operazione. Dunque $(\pm a)0 = 0$.

$0(+a)$ significa che su 0 si fa l'operazione 0 (ossia nessuna operazione) a volte; cioè si sta fermi sullo 0. Dunque $0(+a) = 0$.

Analogamente $0(-a) = 0$; $\qquad 0.0 = 0$.

39. TEOREMA 1°. Il valore numerico del prodotto di più fattori è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori. Il segno del prodotto è positivo se il numero dei fattori negativi è pari; è negativo se il numero dei fattori negativi è dispari.

Sia p.e. il prodotto $(+a)(-b)(-c)(+d)(-e)(+f)$ il quale ha un numero dispari di fattori negativi. Dico che il prodotto sarà negativo, ed eguale al numero $-(abcdef)$; ove $abcdef$ indica il prodotto dei valori numerici dei fattori.

DIMOSTRAZIONE. Per trovare il prodotto cercato, si fa così: Si moltiplica $(+a)$ per $(-b)$, e si ottiene $-(ab)$; poi si moltiplica $-(ab)$

Risposta. Il termometro segnava $+8°$. Ed infatti: se l'estremità della colonna *discende*, ed a mezzodì si trova *a zero*, prima di mezzodì si trovava *al di sopra di zero.*

OSSERVAZIONE. I gradi percorsi *in salita* e le ore *pomeridiane* si potevano chiamare indifferentemente *positivi* o *negativi*. Se avessimo chiamati *negativi* i gradi percorsi *in salita*, e *negative* le ore *pomeridiane*, avremmo ottenuto il medesimo risultato finale. Ma se avessimo chiamati *positivi* i gradi percorsi *in salita*, e *negative* le ore *pomeridiane*, la regola sul segno prodotto non avrebbe più concordato coll'esperienza. In questo caso, per farla concordare, bastava definire il prodotto di due numeri con segno in modo da avere il prodotto positivo quando i fattori sono di segno contrario, e negativo quando i fattori sono dello stesso segno. E così realmente si poteva fare. Però si preferì definire il prodotto di due numeri con segno in modo che esso sia positivo quando i fattori sono entrambi positivi. Se si vuole che, in una data questione, la regola dei segni concordi coll'esperienza, bisogna scegliere i segni delle grandezze in modo che, quando le grandezze sono entrambe positive, anche il loro prodotto sia positivo.

* Questa proposizione si suole anche enunciare così: *Il moltiplicatore positivo lascia il segno del moltiplicando; il moltiplicatore negativo lo cambia.*

La regola del segno del prodotto si trova enunciata esplicitamente per la prima volta nell'Aritmetica di Diofanto di Alessandria (325-409).

per $(-c)$, e si ottiene $+[(ab)c] = +(abc)$; poi si moltiplica $+(abc)$ per $(+d)$, e si ottiene $+[(abc)d] = +(abcd)$; poi si moltiplica $+(abcd)$ per $(-e)$, e si ottiene $-[(abcd)e] = -(abcde)$; poi si moltipl. $-(abcde)$ per $(+f)$, e si ottiene $-[(abcde)f] = -(abcdef)$.

Si vede così che, in ciascun prodotto parziale, il valore numerico del prodotto è sempre eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori.

Si vede pure che il prodotto si fa negativo col 1°, col 3°, col 5°, ecc. fattore negativo che si incontra; si fa invece positivo col 2°, col 4°, col 6°, ecc. fattore negativo che si incontra. Dunque..... *

COROLLARIO 1°. Il prodotto di più numeri con segno è indipendente dall'ordine dei fattori. *(Legge commutativa).*

In un prodotto di più numeri con segno a parecchi fattori, e quali si voglia, si può sostituire il loro prodotto effettuato. E viceversa. *(Legge associativa).*

Dimostrazione. Se si varia l'ordine dei fattori, o ad alcuni fattori si sostituisce il loro prodotto, od al prodotto di alcuni si sostituiscono i fattori, *il segno del prodotto finale non cambia,* perchè esso dipende solamente dal numero dei fattori negativi, e non dal posto che essi occupano: *il valore numerico del prodotto finale non cambia,* perchè esso è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori, il quale (per noti teor. d'Aritm.) ha la proprietà commutativa e la associativa.

COROLLARIO 2°. Affinchè il prodotto di più numeri con segno sia zero, è necessario e sufficiente che sia zero uno dei fattori.

Dimostrazione. Il valore numerico del prodotto è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori; ed affinchè questo prodotto sia zero, (per un noto teor. d'Aritm.) è necessario e sufficiente che sia zero uno dei fattori.

40. TEOREMA 2°. Cambiando il segno ad un fattore, si cambia il segno al prodotto.

Dimostrazione. Se si cambia un segno + in —, il numero dei fattori negativi aumenta d'una unità; e se si cambia un segno — in +, il numero dei fattori negativi diminuisce d'una unità.

Quindi: se prima il numero dei fattori negativi era pari, dopo sarà dispari; e se prima era dispari, dopo sarà pari. Ne segue che se il prodotto prima era positivo, dopo sarà negativo; e se prima era negativo, dopo sarà positivo. **

---

* Se i fattori d'un prodotto sono tutti positivi, il prodotto sarà evidentemente positivo. Si dice allora che il numero dei fattori negativi è zero; e si considera lo zero come un numero pari. Dal teorema risulta che il segno d'un prodotto dipende *solamente* dal numero dei fattori negativi; e che il valore numerico del prodotto dipende *solamente* dal valore numerico dei fattori.

** Nell'*Algebra Elementare ad uso dei Licei,* pag. 26, si può vedere come si potrebbe definire il prodotto di due numeri con segno, frazionari.

POTENZA DEI NUMERI CON SEGNO.

41. DEFINIZIONI. ***Potenza*** **è un prodotto di fattori eguali fra loro.**
Base **della potenza è uno dei fattori.**
Esponente **della potenza è il numero dei fattori.**

Esempio. *a.a.a è una potenza. La base è a, l'esponente è* 3.

Una potenza si dice *pari* o *dispari*, secondochè l'esponente è un numero *pari* o *dispari;* si dice *seconda*, *terza*, *quarta*, ecc. *ennesima*, secondochè l'esponente è 2, 3, 4, ecc. *n*. *

Osservazione. Una potenza si indica scrivendo la *base* una volta sola, e poi l'*esponente*, a destra della base, ed in alto. Così invece di *aaa*, si scrive a^3; invece di $(-a)(-a)(-a)(-a)$, si scrive $(-a)^4$. **

42. TEOREMA 1°. Le potenze di base positiva sono tutte positive. Le potenze di base negativa sono positive, se la potenza è pari; hanno il segno della base, se la potenza è dispari. ***

DIMOSTRAZIONE. ***1° Caso. Base positiva.*** In questo caso, la potenza è un prodotto di fattori tutti positivi; e quindi (pel teor 1° del § 39, nota) è positiva.

2° Caso. Base negativa. In questo caso, la potenza è un prodotto di fattori tutti negativi; e quindi :

Se la potenza è *pari*, il numero dei fattori negativi è pari, ed il prodotto (ossia la potenza) è positivo.

---

* La parola *potenza*, usata per la prima volta da Raffaele Bombelli (1572), è la traduzione di δύναμις, nome che Ippocrate di Chio (nato verso il 450 a.-C.) diede alla 2ª potenza. Questo nome poi venne esteso anche alle altre potenze. Prima di Bombelli, la 2ª potenza si chiamava *quadrato*, la 3ª *cubo*, la 4ª *quadrato quadrato*, la 5ª *quadrato cubo*, la 6ª *cubo cubo;* e questa nomenclatura non oltrepassava ordinariamente la 6ª potenza. Le potenze dei numeri incogniti (cioè dei numeri cercati dal problema) avevano nomi speciali. P.e. l'incognita si chiamava *cosa;* il quadrato dell' incognita, *censo;* il cubo dell'incognita, *cubo;* la 4ª potenza dell' incognita, *censo censo;* la 5ª potenza, *primo relato;* la 6ª potenza, *censo del cubo*, o *cubo del censo;* la 7ª potenza *secondo relato;* ecc. Fu il matematico francese Nicola Chuquet (nato a Parigi verso il 1445) che introdusse, per le potenze, i nomi *numero secondo*, *numero terzo*, *numero quarto*, *numero quinto*, ecc.; i quali, dopo Bombelli, si mutarono in *potenza seconda*, *terza*, *quarta*, *quinta*, ecc.

Per scrivere le potenze, dapprima non si usavano segni speciali; nei secoli XV, XVI, si proposero varie notazioni, le quali però non entrarono nell'uso comune. La notazione attuale è dovuta a Renato Descartes (1596-1650).

** I segni +, —, se sono entro la parentesi, si riferiscono *alla sola base;* se sono fuori della parentesi, si riferiscono *alla potenza*, ossia al risultato dell'operazione. Così, p.e. $(-a)^4$ significa: $(-a)(-a)(-a)(-a)$; mentre, p.e. $-a^4$ significa: $-(aaaa)$.

*** Questo teorema si suole anche enunciare così :

TEOREMA. Le potenze pari sono tutte positive, qualunque sia il segno della base. Le potenze dispari hanno sempre il segno della base.

Se la potenza è *dispari*, il numero dei fattori negativi è dispari, ed il prodotto (ossia la potenza) è negativo.

43. TEOREMA 2°. La potenza emmesima d'un prodotto è eguale al prodotto delle potenze emmesime dei fattori.

Dico p.e. che la potenza emmesima del prodotto abcd è $a^m b^m c^m d^m$*; ossia che è:* $(abcd)^m = a^m b^m c^m d^m$.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione (§ 41) si ha:

$$(abcd)^m = (abcd)\,(abcd)\,(abcd) \ldots\ldots_{m\ volte} =$$

pel coroll. 1° § 39 * $= abcd\,abcd\,abcd \ldots\ldots_{m\ volte} =$

pel medesimo coroll.** $= (aaa\ldots)\,(bbb\ldots)\,(ccc\ldots)\,(ddd\ldots) = a^m b^m c^m d^m$.

44. TEOREMA 3°. Il prodotto di due potenze della medesima base è una potenza della medesima base avente per esponente la somma degli esponenti.

Siano le due potenze a^m *ed* a^n*; dico che sarà:* $a^m.a^n = a^{m+n}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la definiz. del § 41, e pel coroll. 1° § 39, si ha:

$$a^m.a^n = (a.a.a \ldots\ldots_{m\ volte})(a.a.a \ldots\ldots_{n\ volte.}) =$$
$$= (a.a.a \ldots\ldots_{m+n\ volte}) = a^{m+n}.$$

COROLLARIO. Analogamente si avrà:

$$a^m.a^n.a^p.a^q \ldots\ldots = (aaa \ldots\ldots_{m+n+p+q\ volte}) = a^{m+n+p+q\ldots\ldots}$$

45. TEOREMA 4°. La potenza n^a **della potenza** m^a **di un numero è eguale alla potenza** mn^a **di quel numero. *****

Sia p.e. da elevare a^m *alla potenza* n^a*; dico che si avrà per risultato quella potenza di a che ha per esponente il prodotto mn; ossia:*

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la definiz. del § 41, e pel coroll. § 44, si ha:

$$(a^m)^n = a^m a^m a^m \ldots\ldots_{n\ volte} = a^{m+m+m+\cdots\ (n\ volte)} = a^{mn}.\ ****$$

PRODOTTO E POTENZA DEI MONOMI.

46. DEFINIZIONI. 1ª. Un numero solo, od un prodotto di due o più fattori, si chiama *monomio*.

Esempio. Sono monomi -5, a, $+m$, $4a^2b$, $3(a+b)(m-2n)$.

---

* Al prodotto eseguito di alcuni fattori sostituendone i fattori.

** Ad alcuni fattori sostituendo il loro prodotto.

*** Questo teorema si suole anche enunciare così:

***TEOREMA.** Per elevare una potenza ad una potenza, basta scrivere una potenza della medesima base avente per esponente il prodotto degli esponenti.*

**** Si stabilisce per convenzione che sia la stessa cosa scrivere $a^{(m+n)}$, o scrivere a^{m+n}. Così pure sia la medesima cosa scrivere $a^{(m \cdot n)}$, oppure $a^{m \cdot n}$.

2ª. Il fattore numerico di un monomio dicesi *coefficiente* del monomio.*

Esempio. In $-4a^2b$ il coefficiente è -4; in $+3xy^4$ è $+3$.

Osservazione. In un monomio che non abbia segnato alcun fattore numerico si sottintende il fattore $+1$, e quindi un tale monomio ha per coefficiente $+1$. P.e. il coefficiente di a^2b è $+1$.

47. PRODOTTO DEI MONOMI.

Esempio 1º. *Si trovi il prodotto di* $+4a^2bc$ *per* $-3a^3b^2n$.

Per la regola del § 38, è: $(+4a^2bc)(-3a^3b^2n)=-\left[(4a^2bc)(3a^3b^2n)\right]=$
pel corollario 1º § 39 $\qquad =-(4.3)(a^2.a^3)(b.b^2)cn=$
pel teorema § 44 $\qquad =-12a^5b^3cn$.

Esempio 2º. *Si trovi il prodotto di* $-{}^1/_2p^2q$ *per* $-3pqr$.
Ragionando come nell'esempio precedente, avremo:

$$\left(-\frac{1}{2}p^2q\right)(-3pqr)=+\left[\left(\frac{1}{2}p^2q\right)(3pqr)\right]=+\left(\frac{1}{2}\cdot 3\right)(p^2p)(qq)r=$$
$$=+\frac{3}{2}p^3q^2r.$$

Esempio 3º. *Si trovi il prodotto di* $-5a^2b$, $+2ab^3c$, $-3b^2c^2$.
Ragionando come nell'esempio 1º, avremo:

$$(-5a^2b)(+2ab^3c)(-3b^2c^2)=+\left[(5a^2b)(2ab^3c)(3b^2c^2)\right]=$$
$$=+(5.2.3)(a^2a)(bb^3b^2)(cc^2)=+30a^3b^6c^3.$$

Da questi esempi si ricava la seguente regola:

REGOLA. 1º. Il prodotto di due o più monomi è un monomio.

2º. Il segno del prodotto è positivo, se i fattori sono tutti positivi, o se il numero dei fattori negativi è pari; è negativo, se il numero dei fattori negativi è dispari.

3º. Il coefficiente del prodotto è il prodotto dei coefficienti dei fattori.

4º. I fattori letterali sono tutti, e soli, quelli dei monomi dati, scritti ciascuno una volta sola.

5º. L'esponente di ciascun fattore letterale del prodotto è la somma degli esponenti che il medesimo fattore letterale ha nei monomi dati. Un fattore letterale che si trovi in un solo monomio, conserva nel prodotto il proprio esponente inalterato. **

---

* La parola *coefficiente* fu introdotta da Francesco Viète nel 1591, e non se ne conosce l'etimologia. Viète nacque in Fontenay-le-Comte (Poitou) nel 1540, e morì a Parigi nel 1603; egli fece fare grandissimi progressi all'Algebra, ed è forse il più grande matematico del suo secolo.

** Per applicare la 4ª parte della regola, si suppone che se un numero non ha segnato alcun esponente, abbia per esponente sottinteso 1. Si pone cioè per convenzione $a=a^1$.

48. POTENZA DEI MONOMI.

Esempio 1º. *Si elevi* $-2a^5b^3c^2$ *alla* 3ª *potenza.*

Pel teor. 2º § 43, avremo: $(-2a^5b^3c^2)^3 = -2^3.(a^5)^3.(b^3)^3.(c^2)^3 =$

pel teorema 4º § 45, $= -8a^{5\cdot 3}.b^{3\cdot 3}.c^{2\cdot 3} = -8a^{15}b^9c^6.$

Esempio 2º. *Si elevi* $+{}^3/_5xy^2m^4$ *alla* 2ª *potenza.*

Ragionando come nell'esempio precedente, avremo:

$$\left(+\frac{3}{5}x\,y^2m^4\right)^2 = +\left(\frac{3}{5}\right)^2.x^2.(y^2)^2.(m^4)^2 = +\frac{3^2}{5^2}x^2.y^{2\cdot 2}.m^{4\cdot 2} =$$

$$= +\frac{9}{25}x^2y^4m^8.$$

Ne segue immediatamente la regola:

REGOLA. 1º. La potenza m^a di un monomio è un monomio.

2º. Il segno della potenza è positivo, se l'esponente è pari; è il segno della base, se l'esponente è dispari.

3º. Il coefficiente della potenza è la potenza m^a del coefficiente della base.

4º. I fattori letterali della potenza sono quelli della base, coi rispettivi esponenti moltiplicati per m. *

MOLTIPLICAZIONE DEI POLINOMI.

49. DEFINIZIONE. Dicesi *polinomio* la somma di più monomi. **

Il polinomio di due soli monomi si chiama *binomio;* quello di tre, *trinomio.* Ciascun monomio poi si chiama anche *un termine* del polinomio.

Esempio. $a-2b$ è un binomio; $-2+c-7$ è un trinomio.

50. TEOREMA. Per moltiplicare una somma per un numero, basta moltiplicare ciascun addendo della somma per questo numero, e poi

---

* AVVERTENZE. Ricordino bene i principianti che:

1º. *Il coefficiente non si moltiplica per m, ma si eleva alla potenza* m^a. Perciò sarà p.e. $(3a^2b^3c)^2 = 3^2.a^4b^6c^2$, e non $(3a^2b^3c)^2 = 3.2.a^4b^6c^2$.

2º. *Gli esponenti non si sommano con m, nè si elevano alla potenza* m^a, *ma si moltiplicano per m.* Avremo perciò p.e. $(a^3b^5)^2 = a^{3\cdot 2}.b^{5\cdot 2} = a^6b^{10}$; e non $(a^3b^5)^2 = a^{3+2}b^{5+2} = a^5b^7$, e neppure $(a^3b^5)^2 = a^9b^{25}$.

3º. *Si moltiplicano per m tutti gli esponenti, e non solamente l'ultimo a destra.* Avremo quindi p.e. $(3a^2b^3c)^2 = 9a^{2\cdot 2}.b^{3\cdot 2}.c^{1\cdot 2} = 9a^4b^6c^2$ e non $(3a^2b^3c)^2 = 9a^2b^3c^2$.

4º. *La potenza* m^a *di un monomio si indica chiudendo il monomio in parentesi, e ponendo l'esponente m fuori della parentesi; e non già scrivendo semplicemente m in alto ed a destra dell'ultimo fattore del monomio.*

** Fu Simone Stevin (nato a Brügge nel Belgio nel 1548, e morto non si sa se a a Leida o ad Haag, nel 1620) che introdusse nella scienza i termini *monomio, multinomio.* Invece di multinomio, si disse poi *polinomio.*

sommare i prodotti parziali. *(Legge distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).*

Sia p.e. la somma $a-b+c$ *da moltiplicare per* $+m$*: dico che basterà moltiplicare* $+a$ *per* $+m$*, e si ha* $+am$*; poi moltiplicare* $-b$ *per* $+m$*, e si ha* $-bm$*; poi moltiplicare* $+c$ *per* $+m$*, e si ha* $+cm$*; ed infine sommare i risultati; e si ha:* $+am-bm+cm$.

Dico dunque che avremo: $(a-b+c)(+m)=+am-bm+cm$.

Analogamente avremo: $(a-b+c)(-m)=-am+bm-cm$.

DIMOSTRAZIONE. ***Moltiplicatore positivo.*** Per le definizioni 5ª e 6ª del § 36, il prodotto del numero $+a-b+c$ pel numero $+m$, è il numero che si ottiene facendo m volte sü zero l'operazione $+a-b+c$. Avremo quindi:

$$(a-b+c)(+m)=(a-b+c)+(a-b+c)+(a-b+c)+\ldots\ldots_{m\ volte}=^{*}$$
$$=a+a+a+\ldots\ldots-b-b-b-\ldots\ldots+c+c+c+\ldots\ldots=^{**}$$
$$=(a+a+a+\ldots)-(b+b+b\ldots)+(c+c+c+\ldots)=$$
$$=am-bm+cm.$$

Moltiplicatore negativo. Per le definizioni 7ª ed 8ª del § 36, il prodotto del numero $+a-b+c$ pel numero $-m$ è il numero che si ottiene facendo m volte sopra zero l'operazione $+a-b+c$ *invertita*, ossia l'operazione $-(a-b+c)$. Avremo quindi:

$$(a-b+c)(-m)=-(a-b+c)-(a-b+c)-(a-b+c)-\ldots_{m\ volte}=^{***}$$
$$=-a+b-c-a+b-c-a+b-c-\ldots\ldots_{m\ volte}=$$
$$=-a-a-a-\ldots+b+b+b+\ldots-c-c-c-\ldots\ldots=$$
$$=-(a+a+a+\ldots)+(b+b+b+\ldots)-(c+c+c+)=$$
$$=-am+bm-cm.$$

Osservazione. Essendo eguali le due espressioni $(a-b+c)(+m)$ ed $am-bm+cm$, se è data una di esse, potremo sempre sostituirvi l'altra. Quando, al posto di $am-bm+cm$, si scrive $(a-b+c)(+m)$, si dice che in $am-bm+cm$ ***si mette in evidenza il fattore*** $+m$ comune a tutti gli addendi della somma. Lo stesso si dica delle due espressioni $(a-b+c)(-m)$ e $-am+bm-cm$; ed in ogni altro caso in cui tutti gli addendi di una somma hanno un medesimo fattore. ****

COROLLARIO 1°. Per moltiplicare un numero per una somma, basta

---

* Per la legge associativa e commutativa dell'addizione.

** Per la legge associativa dell'addizione.

*** Per la regola del § 35.

**** Sul ***mettere in evidenza*** un fattore, si tratterà più diffusamente nel capitolo: *Divisione di un polinomio per un monomio.*

moltiplicare il numero per ciascun addendo della somma, e poi sommare i prodotti parziali.

Sia p.e. $(\pm m)$ *da moltiplicare per* $a-b+c$; *dico che avremo:*

$$(+m)(a-b+c)=+ma-mb+mc.$$
$$(-m)(a-b+c)=-ma+mb-mc.$$

DIMOSTRAZIONE. Pel coroll. 1° § 39, il prodotto dei due numeri $\pm m$ ed $a-b+c$* è indipendente dall'ordine dei fattori; e quindi:

$$(+m)(a-b+c)=(a-b+c)(+m)= \text{ pel teor. preced.}$$
$$=am-bm+cm= \text{ pel coroll. 1° § 39}$$
$$=ma-mb+mc. \text{ Analogamente si ha:}$$
$$(-m)(a-b+c)=(a-b+c)(-m)=-am+bm-cm=-ma+mb-mc.$$

COROLLARIO 2°. Per moltiplicare una somma per una somma, basta moltiplicare ciascun addendo della 1ª per ciascun addendo della 2ª, e poi sommare i prodotti parziali.

Abbiasi da moltiplicare la somma $a-b-c+d$ *per la somma* $m-n+p$. *Dico che basterà moltiplicare (secondo la regola della moltiplicazione dei numeri con segno) ciascun addendo di* $a-b-c+d$ *per ciascun addendo di* $m-n+p$, *e poi sommare (algebricamente) i risultati. Dico cioè che si avrà:* $(a-b-c+d)(m-n+p)=$
$$=am-bm-cm+dm-an+bn+cn-dn+ap-bp-cp+dp.$$

DIMOSTRAZIONE. Considerando $a-b-c+d$ come un numero unico, ed $m-n+p$ come una somma, pel coroll. preced. avremo:

$$(a-b-c+d)(m-n+p)=$$
$$=(a-b-c+d)(+m)+(a-b-c+d)(-n)+(a-b-c+d)(+p)= \text{**}$$
$$=am-bm-cm+dm-an+bn+cn-dn+ap-bp-cp+dp.$$

Esempio. $(4a^2b-3ab^2-b^3)(5a^2+b^2)=(+4a^2b)(+5a^2)+$
$+(-3ab^2)(+5a^2)+(-b^3)(+5a^2)+(+4a^2b)(+b^2)+(-3ab^2)(+b^2)+$
$+(-b^3)(+b^2)=20a^4b-15a^3b^2-5a^2b^3+4a^2b^3-3ab^4-b^5$. ***

RIDUZIONE DEI TERMINI SIMILI.

51. DEFINIZIONE. Vari monomi si dicono *simili* se sono identici, o se differiscono solamente pel segno e pel coefficiente.

---

* Si osservi che $a-b+c$ è un numero; cioè il numero che si ottiene quando su a si fa l'operazione $-b$, e poi sul risultato si fa l'operazione $+c$.

** Considerando ora $a-b-c+d$ come una somma, ed applicando il teorema precedente, si ha il risultato cercato.

*** L'allievo si abitui a scrivere immediatamente il prodotto finale, eseguendo *a memoria* i prodotti parziali di un monomio per un monomio. In questi prodotti parziali è bene abituarsi a considerare per ordine prima *il segno*, poi *il coefficiente*, poi *i fattori letterali*, e poi *gli esponenti*.

Esempio. Sono simili i monomi $+a$, $-2a$, $+\frac{1}{3}a$. Sono pure simili i monomi $-a^2bc$, $+7a^2bc$, $-\frac{3}{4}a^2bc$.

In un polinomio i termini simili fra loro si possono riunire in un solo.

Esempio 1º. Sia dato il polinomio $3a^2bc-5a^2bc+8a^2bc-9a^2bc$.

Esso si può scrivere $3.(a^2bc)-5.(a^2bc)+8.(a^2bc)-9.(a^2bc)$; ove si vede che è la somma (algebrica) di più numeri i quali sono tutti moltiplicati pel medesimo numero a^2bc. Per la Osserv. § 50, posso ***mettere in evidenza*** il fattore a^2bc comune a tutti i termini della somma, ed ottengo:

$$3a^2bc-5a^2bc+8a^2bc-9a^2bc=$$
$$=3(a^2bc)-5(a^2bc)+8(a^2bc)-9(a^2bc)=(3-5+8-9)a^2bc=-3a^2bc.$$

Esempio 2º. Sia dato il polinomio $6a^2b-2a^2b-5cd-2cd-4cd$.

Per la Regola § 35, posso chiudere in parentesi tutti i termini fra loro simili, ed avrò: $(6a^2b-2a^2b)-(5cd+2cd+4cd)$. Mettendo ora nel 1º addendo ***in evidenza*** il fattore a^2b, e nel 2º addendo il fattore cd, avrò: $(6-2)a^2b-(5+2+4)cd=4a^2b-11cd$. Questo polinomio è equivalente al polinomio dato, e non ha più termini simili.

Esempio 3º. Sia $5a^4b^2c+8a^3b-7a^4b^2c-b^2+6a^3b+2b^2+5b^2$.

Pel teor. 3º § 29, posso cambiar l'ordine degli addendi; e scrivendoli in modo che i termini fra loro simili siano consecutivi, ottengo:

$$5a^4b^2c-7a^4b^2c+8a^3b+6a^3b-b^2+2b^2+5b^2.$$

Per la regola § 35, posso chiudere in parentesi tutti i termini fra loro simili, ed ottengo: $(5a^4b^2c-7a^4b^2c)+(8a^3b+6a^3b)-(b^2-2b^2-5b^2)$.

Mettendo ora ***in evidenza*** nel 1º addendo il fattore a^4b^2c, nel 2º il fattore a^3b, e nel 3º il fattore b^2, si ha: *

$$(5-7)a^4b^2c+(8+6)a^3b-(1-2-5)b^2=$$
$$=-2a^4b^2c+14a^3b-(-6)b^2=-2a^4b^2c+14a^3b+6b^2.$$

L'ultimo polinomio è eguale al polinomio dato, e non ha più termini simili.

52. L'operazione fatta sui polinomi degli esempi precedenti si suole chiamare ***riduzione dei termini simili.*** Ne segue:

REGOLA. Per ridurre vari monomi simili in uno solo, basta scrivere un monomio simile ai monomi dati, ed avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dei monomi dati. **

Osservazione. Due monomi non simili non si possono ridurre in uno solo; epperciò un polinomio i cui termini non sono tutti simili, non si può ridurre ad essere un monomio.

---

* Ricordando che è p.e. $b^2-2b^2-5b^2=1.b^2-2b^2-5b^2=(1-2-5)b^2=-6b^2$, si eviti l'errore che si commetterebbe scrivendo p.e. $b^2-2b^2-5b^2=(-2-5)b^2=-7b^2$.

** Per fare questa riduzione è utile far prima la somma algebrica dei coefficienti come se fossero soli. Così nell'esempio 1º si direbbe p.e. $+3-5$ dà -2; $-2+8$ dà $+6$; $+6-9$ dà -3; dunque $-3a^2bc$.

PRODOTTI NOTEVOLI.

53. I risultati di alcune moltiplicazioni acquistano un' importanza particolare per l'uso frequente che se ne fa. Bisogna quindi che l'allievo li sappia bene a memoria. Ecco i principali.

54. Qualunque siano i numeri a, b, eseguendo la moltiplicazione con le regole ordinarie, si trova che è:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Questa eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 1°. Il prodotto della somma per la differenza di due numeri è eguale alla differenza dei quadrati dei medesimi numeri.

Esempio 1°. $(3a^2b+2ac)(3a^2b-2ac)=(3a^2b)^2-(2ac)^2=$
$$=9a^4b^2-4a^2c^2.$$

Esempio 2°. $\left(\frac{2}{3}xy^2+5\right)\left(\frac{2}{3}xy^2-5\right)=\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2-5^2=\frac{4}{9}x^2y^4-25.$

55. Similmente, eseguendo la moltiplicazione, si trova che è:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Quest'eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 2°. Il quadrato della somma di due numeri è eguale al quadrato del 1°, più il doppio prodotto del 1° pel 2°, più il quadrato del 2°.

Esempio 1°. $(3a^2bc+2xy^2)^2=(3a^2bc)^2+2(3a^2bc)(2xy^2)+(2xy^2)^2=$
$$=9a^4b^2c^2+12a^2bcxy^2+4x^2y^4.$$

Esempio 2°. $(4ab^2c^3+a^3b)^2=(4ab^2c^3)^2+2(4ab^2c^3)(a^3b)+(a^3b)^2=$
$$=16a^2b^4c^6+8a^4b^3c^3+a^6b^2.$$

56. Similmente, eseguendo la moltiplicazione, si trova che è:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Quest'eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 3°. Il quadrato della differenza di due numeri è eguale al quadrato del 1°, meno il doppio prodotto del 1° pel 2°, più il quadrato del 2°.*

Esempio 1°. $(3x^2y-1)^2=(3x^2y)^2-2(3x^2y).1+1^2=9x^4y^2-6x^2y+1.$

Esempio 2°. $\left(5mn^2p-\frac{1}{3}mn\right)^2=(5mn^2p)^2-2(5mn^2p)\left(\frac{1}{3}mn\right)+$
$$+\left(\frac{1}{3}mn\right)^2=25m^2n^4p^2-\frac{10}{3}m^2n^3p+\frac{1}{9}m^2n^2.$$

---

* La (2) e la (3) si riuniscono in una sola, scrivendo; $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

57. Similmente, eseguendo la moltiplicazione, si trova che è:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Quest'eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 4°. Il cubo della somma di due numeri è eguale al cubo del 1°, più il triplo prodotto del quadrato del 1° pel 2°, più il triplo prodotto del 1° pel quadrato del 2°, più il cubo del 2°.

Esempio 1°. $(2a^3b^2c+ab^2)^3=(2a^3b^2c)^3+3(2a^3b^2c)^2(ab^2)+$
$+3(2a^3b^2c)(ab^2)^2+(ab^2)^3=8a^9b^6c^3+12a^7b^6c^2+6a^5b^6c+a^3b^6.$

Esempio 2°. $\left(\frac{3}{4}xy+\frac{1}{3}xy^2\right)^3=\left(\frac{3}{4}xy\right)^3+3\left(\frac{3}{4}xy\right)^2\left(\frac{1}{3}xy^2\right)+$

$+3\left(\frac{3}{4}xy\right)\left(\frac{1}{3}xy^2\right)^2+\left(\frac{1}{3}xy^2\right)^3=\frac{27}{64}x^3y^3+3\left(\frac{3}{4}\right)^2.\frac{1}{3}x^3y^4+$

$+3.\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2x^3y^5+\frac{1}{27}x^3y^6=\frac{27}{64}x^3y^3+\frac{9}{16}x^3y^4+\frac{1}{4}x^3y^5+\frac{1}{27}x^3y^6.$

58. Nello stesso modo si trova che è:

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Quest'eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 5°. Il cubo della differenza di due numeri è eguale al cubo del 1°, meno il triplo prodotto del quadrato del 1° pel 2°, più il triplo prodotto del 1° pel quadrato del 2°, meno il cubo del 2°. *

Esempio 1°. $(3x^2y-2xy^2)^3=(3x^2y)^3-3(3x^2y)^2(2xy^2)+$
$+3(3x^2y)(2xy^2)^2-(2xy^2)^3=27x^6y^3-54x^5y^4+36x^4y^5-8x^3y^6.$

Esempio 2°. $(1-5xy)^3=1^3-3.1^2(5xy)+3.1.(5xy)^2-(5xy)^3=$
$=1-15xy+75x^2y^2-125x^3y^3.$

---

* La (4) e la (5) si riuniscono in una sola, scrivendo:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

Si osservi che, nel 2° membro dell'eguaglianza, *i termini contenenti le potenze dispari d'una medesima base hanno tutti il medesimo segno.*

CAPO QUINTO.

Divisione.

IL QUOTO E LE SUE PROPRIETÀ FONDAMENTALI.

59. DEFINIZIONE. Dicesi *quoto* di due numeri con segno un terzo numero con segno che, moltiplicato pel secondo, dia per prodotto il primo.

Il 1° numero si chiama *dividendo*, il 2° *divisore*. Il quoto dei due numeri a, b, si indica scrivendo $a:b$ od $\frac{a}{b}$ od $^a/_b$, e si legge *a diviso b*. *

Osservazione. Quando il quoto è scritto sotto la forma $\frac{a}{b}$, o sotto la forma $^a/_b$, si suole anche chiamare *frazione;* ed allora il dividendo si chiama *numeratore*, ed il divisore *denominatore.*

60. DEFINIZIONE. La *divisione algebrica* è quell'operazione per cui, dati due numeri con segno, se ne trova il quoto. **

COROLLARIO. In ogni divisione il dividendo è il prodotto del divisore pel quoto.

Ne segue che la divisione algebrica si può anche definire così:

61. DEFINIZIONE. La *divisione algebrica* è quell'operazione per cui, dato il prodotto di due numeri con segno, ed uno di essi, si trova l'altro.

62. TEOREMA 1°. Il valore numerico del quoto è il quoto del valore numerico del dividendo pel valore numerico del divisore. Il segno del quoto è positivo, se il dividendo ed il divisore hanno egual segno; è negativo, se hanno segno contrario.

DIMOSTRAZIONE. Poichè il valore numerico del prodotto (dividendo) è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori (divisore e quoto), il valore numerico del quoto moltiplicato pel valore numerico del divisore, deve dare il valore numerico del dividendo; e quindi *il valore numerico del quoto è il quoto del valore numerico del dividendo pel valore numerico del divisore.*

La 2ª parte del teorema riesce evidente se si osserva che quando il

---

* $\frac{a}{b}$ ed a/b si leggono anche *a sopra b*. Il segno : di divisione fu introdotto da Goffredo Guglielmo Leibniz, nato a Lipsia nel 1646, e morto in Annover nel 1716. Pare che la notazione $\frac{a}{b}$ sia di origine indiana; essa fu introdotta in Europa da Leonardo da Pisa, detto Fibonacci (filius Bonacii) che l'adoperò nel suo *Liber abaci*, pubblicato nel 1202.

** Sono sinonime le espressioni *dividere* e *trovare il quoto.*

dividendo (prodotto) è positivo, i due fattori (divisore e quoto) devono avere egual segno; e che, quando il dividendo (prodotto) è negativo, i due fattori (divisore e quoto) devono avere segni contrari. *

Osservazione. Si conosce più facilmente quale debba essere il segno del quoto servendosi della seguente tavola:

Moltiplicando	**Moltiplicatore**	**Prodotto**
+	+	+
+	—	—
—	—	+
—	+	—
Quoto	**Divisore**	**Dividendo**

Osservando le intitolazioni superiori, si hanno i segni del moltiplicando, del moltiplicatore e del prodotto. Osservando le intitolazioni inferiori, si hanno i segni del dividendo, del divisore e del quoto.

COROLLARIO 1°. Cambiando il segno al dividendo ed al divisore, il quoto non cambia nè il valore numerico nè il segno.

DIMOSTRAZIONE. *Il valore numerico* del quoto non cambia, perchè esso dipende solamente dal valore numerico del dividendo e del divisore, e non dal loro segno.

Il segno del quoto non cambia, come si ricava confrontando fra loro la 1ª e la 2ª riga, e poi la 3ª e la 4ª riga della tavola precedente.

COROLLARIO 2°. Cambiando il segno al solo dividendo od al solo divisore, il quoto non cambia il valore numerico, ma cambia il segno.

DIMOSTRAZIONE. *Pel valore numerico*, come nel coroll. preced.

Pel segno, si osservi che se il dividendo ed il divisore prima avevano egual segno, dopo avranno segno contrario; e, se prima avevano segno contrario, dopo avranno egual segno. Dunque, in ogni caso, il segno del quoto cambia.

COROLLARIO 3°. Il quoto di due numeri con segno non cambia se il dividendo ed il divisore si moltiplicano o si dividono entrambi per un medesimo numero diverso da zero.

DIMOSTRAZIONE. *Il valore numerico del quoto non cambia,*

---

* Rappresentando con a il valore numerico del dividendo, e con b il valore numerico del divisore che supponiamo diverso da zero, e con $\frac{a}{b}$ il valore numerico del quoto, il teorema si può esprimere brevemente così:

$(+a):(+b)$ ossia $\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b}$; $(+a):(-b)$ ossia $\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}$;

$(-a):(-b)$ ossia $\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$; $(-a):(+b)$ ossia $\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}$.

perchè (pel teor. preced.) esso è il quoto del valore numerico del dividendo pel valore numerico del divisore; e sappiamo dall'Aritmetica che il quoto di due numeri non cambia se si moltiplica o si divide il dividendo ed il divisore per un medesimo numero diverso da zero.

Il segno del quoto non cambia, perchè se si moltiplica o si divide il dividendo ed il divisore pel medesimo numero diverso da zero, essi conservano entrambi il loro segno, o lo mutano entrambi. Nell'uno e nell'altro caso il segno del quoto non cambia.

Osservazione 1ª. Quando il dividendo è zero, ed il divisore è diverso da zero, il quoto è zero. Infatti: il dividendo è il prodotto del divisore pel quoto. Ora, pel coroll. 2° § 39, affinchè un prodotto sia zero, è necessario e sufficiente che sia zero uno dei fattori. Nel caso nostro un fattore (divisore) è diverso da zero; dunque deve essere zero l'altro fattore (quoto). Ne segue che per ogni valore positivo o negativo, ma non nullo, di m, avremo: $\frac{0}{m}=0$.

Osservazione 2ª. Quando il dividendo è diverso da zero, ed il divisore è zero, il quoto non esiste. Infatti: se esistesse, dovrebbe essere un numero che moltiplicato pel divisore, che è zero, dia per prodotto un numero (dividendo) diverso da zero. Ma ciò non può essere; perchè, pel coroll. 2° § 39, se uno dei fattori è zero, il prodotto è zero. Dunque..... *

Osservazione 3ª. Quando il dividendo ed il divisore sono zero, il quoto è indeterminato. Infatti: ogni numero può essere quoto, perchè ogni numero moltiplicato per zero (divisore) dà per prodotto zero (dividendo).

Osservazione 4ª. Sarà sottinteso che, in ogni divisione, supporremo che il divisore sia diverso da zero. Ne segue che se il divisore contiene numeri rappresentati con lettere, sottintenderemo sempre esclusi dalla nostra considerazione quei valori delle lettere pei quali il divisore diventa zero.

63. TEOREMA 2°. Per dividere il prodotto di più numeri con segno per il prodotto di alcuni di essi, basta sopprimere nel dividendo i fattori del divisore.

Sia p.e. da dividere il prodotto abcde pel prodotto bd. Dico che il quoto sarà ace. Avrò dimostrato che ace è il vero quoto, se dimostro che, moltiplicato pel divisore bd, dà per prodotto il dividendo abcde.

---

* Qualsiasi numero, per grande che sia, non è mai così grande che, moltiplicato per zero, possa dar un prodotto diverso da zero; e quindi qualsiasi numero si prenda per quoto è sempre troppo piccolo. Si suole esprimere ciò dicendo che il quoto è ***infinito***. (*Infinito* si scrive ∞). Avremo quindi, per ogni valore di m diverso da zero, $\frac{m}{0}=\infty$.

Si osservi che, dicendo ***infinito***, non si vuol dire che il quoto è un numero il quale è infinitamente grande, perchè ciò sarebbe assurdo. Il primo ad adoperare il segno ∞ per indicare ***infinito*** fu il matematico inglese Giovanni Wallis (nato in Ashford nel 1616, e morto a Londra nel 1703) nel suo *Tractatus de sectionibus conicis* pubblicato nel 1655.

DIMOSTRAZIONE. Per la legge associativa e commutativa della moltiplicazione (coroll. 1° § 39) abbiamo: $(ace)(bd) = acebd = abcde$.
Dunque: ace è veramente il quoto di $abcde$ per bd.

COROLLARIO. Il quoto di due potenze della medesima base, quando la differenza fra l'esponente del dividendo e quello del divisore è maggiore dell'unità, è una potenza della medesima base, avente per esponente la differenza fra l'esponente del dividendo e quello del divisore. *

Sia p.e. $m-n>1$; *dico che sarà:* $a^m : a^n = a^{m-n}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo per definizione (§ 41):

$$a^m : a^n = (a.a.a\ldots\ldots_{m \text{ volte}}) : (a.a.a\ldots\ldots_{n \text{ volte}}).$$

E sopprimendo nel dividendo gli n fattori del divisore, si avrà per quoto $aaa\ldots\ldots_{m-n \text{ volte}}$, ossia a^{m-n}. Dunque: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Osservazione. Per definizione (§ 59) il quoto di due numeri a, b, è $\frac{a}{b}$
Se a, b sono monomi aventi fattori comuni, (pel coroll. 3° § 62) potremo dividere il dividendo ed il divisore per questi fattori comuni, ed otterremo il quoto sotto forma più semplice.

Esempio 1°. Per la definiz. § 59, il quoto di $+12a^2mn$ per $-15a^3mp$ è $\frac{+12a^2mn}{-15a^3mp} = -\frac{12a^2mn}{15a^3mp}$. Mettiamo in evidenza tutti i fattori che sono comuni al dividendo ed al divisore. A tal fine scomponiamo i coefficienti nei loro fattori primi; e, poichè nel dividendo vi è a^2 e nel divisore a^3, scriveremo nel divisore a^2a al posto di a^3, ed avremo $-\frac{12a^2mn}{15a^3mp} = -\frac{2^2.3.a^2mn}{3.5.a^2amp}$.

I fattori 3, a^2, m sono comuni al dividendo ed al divisore. Dividiamo adunque il dividendo ed il divisore pel prodotto $3a^2m$ (ossia sopprimiamo nel dividendo e nel divisore i fattori comuni 3, a^2, m), ed avremo:

$$-\frac{2^2.3.a^2mn}{3.5.a^2.amp} = -\frac{(2^2.3.a^2mn):(3a^2m)}{(3.5.a^2amp):(3a^2m)} = -\frac{2^2n}{5ap} = -\frac{4n}{5ap}. \;**$$

Esempio 2°. Il quoto di $-6a^5b^2c$ per $+3a^3b^2$ è $\frac{-6a^5b^2c}{+3a^3b^2} = -\frac{6a^5b^2c}{3a^3b^2}$.

* È sottinteso che m, n, sono numeri *interi*, *positivi*. Si è poi messa la restrizione $m-n>1$ perchè, secondo la definizione data di potenza (§ 41), l'esponente deve, in ogni caso, essere intero, positivo, maggiore di 1.

** È utile abituarsi a far sempre queste semplificazioni al quoto, ed a farle *a memoria*, scrivendo immediatamente il risultato finale.

Operando come nell'es. preced., si ha: $-\frac{6a^5b^2c}{3a^3b^2}=-\frac{2.3.a^3a^2b^2c}{3a^3b^2}=$

$$=-\frac{(2.3.a^3a^2b^2c):(3a^3b^2)}{(3a^3b^2):(3a^3b^2)}=-\frac{2a^2c}{1}=-2a^2c.$$

Esempio 3º. Il quoto di $+3a^2bc$ per $+15a^2bc^3$ è $+\frac{3a^2bc}{15a^2bc^3}$.

Operando come negli esempi precedenti, si ha:

$$+\frac{3a^2bc}{15a^2bc^3}=+\frac{3a^2bc}{3.5.a^2bc.c^2}=+\frac{(3a^2bc):(3a^2bc)}{(3.5.a^2bc.c^2):(3a^2bc)}=+\frac{1}{5c^2}. \text{*}$$

64. DEFINIZIONE 1ª. Un monomio si dice *intero* se non vi è indicata alcuna divisione.

DEFINIZIONE 2ª. Un monomio intero si dice *divisibile per un altro monomio intero,* se il quoto del 1° pel 2° è un monomio intero.

COROLLARIO. Affinchè un monomio intero sia divisibile per un altro monomio intero, è necessario e sufficiente che nel dividendo si trovino tutti i fattori del divisore. **

DIMOSTRAZIONE. Come si vede dagli esempi precedenti, affinchè il quoto sia un monomio intero, è necessario e sufficiente che sopprimendo i fattori comuni al dividendo ed al divisore, il divisore diventi l'unità; ed affinchè ciò succeda, è necessario e sufficiente che nel dividendo si trovino tutti i fattori del divisore.

65. Poichè, come risulta dall'esempio 2° § 63, il quoto intero di due monomi interi si ottiene sopprimendo nel dividendo i fattori che formano il divisore, avremo la seguente regola:

REGOLA. 1º. Il quoto intero di due monomi interi è positivo, se il dividendo ed il divisore hanno egual segno; è negativo, se hanno segno contrario. *(Per la 2ª parte del teor. 1° § 62).*

---

* Giova osservare che l'espressione, *si sopprime un fattore di un prodotto*, è un modo abbreviato per dire: *si divide un prodotto per un suo fattore dividendo questo fattore per se stesso; ed il quoto, che è l'unità, non si scrive.* Se, nel fare la semplificazione sopra indicata, il divisore diventa 1, quest'1 si può sopprimere, come si fece nell'es. 2°, ma se è il dividendo che diventa 1 (come è nell'es. 3°), quest'1 non si può sopprimere.

** L'enunciato del coroll. si suole esprimere più diffusamente colla seguente regola:

REGOLA. Affinchè un monomio intero sia divisibile per un altro monomio intero, è necessario e sufficiente: 1º Che il coefficiente del dividendo sia divisibile pel coefficiente del divisore; 2º Che il dividendo contenga tutti i fattori letterali del divisore; 3º Che ciascun fattore letterale abbia nel dividendo un esponente non inferiore a quello che esso ha nel divisore.

Sovente si suole considerare ancora come intero un monomio che abbia frazionario solamente il coefficiente; ed allora si sopprime la prima condizione.

In questa ipotesi $-5a^2bc^2d^3$ sarebbe divisibile per $+7abd^2$, ed il quoto sarebbe:

$$-\frac{5a^2bc^2d^3}{7abd^2}=-\frac{5ac^2d}{7}=-\frac{5}{7}ac^2d.$$

2º. Il coefficiente del quoto è il quoto del coefficiente del dividendo pel coefficiente del divisore. *(Perchè si ottiene sopprimendo, nel coefficiente del dividendo, i fattori che formano il coefficiente del divisore).*

3º. Se un fattore letterale si trova nel dividendo e nel divisore col medesimo esponente, non si trova più nel quoto. *(Perchè viene soppresso).*

4º. Se un fattore letterale si trova nel dividendo e non nel divisore, si troverà nel quoto col proprio esponente inalterato.

5º. Se un fattore letterale si trova nel dividendo e nel divisore con esponenti diversi, si troverà nel quoto con un esponente eguale alla differenza fra l'esponente che esso ha nel dividendo e quello che ha nel divisore. *(Poichè se un fattore si trova m volte nel dividendo, ed n volte nel divisore, nel quoto si troverà m—n volte).*

MASSIMO COMUN DIVISORE

E MINIMO COMUN MULTIPLO DEI MONOMI.

66. DEFINIZIONE. Un monomio intero che divida più altri monomi interi, si chiama loro *divisore comune*.

Un monomio intero chiamasi **Massimo Comun Divisore** di più monomi interi (e si scrive M.C.D.) se: 1° Ha per coefficiente il massimo comun divisore dei coefficienti dei monomi dati; 2° Contiene tutti e soli i fattori letterali comuni a tutti i monomi dati; 3° Ciascun suo fattore ha per esponente il minimo esponente che il fattore stesso ha nei monomi dati.

67. DEFINIZIONE. Un monomio intero che sia divisibile per vari altri monomi interi, si chiama loro *multiplo comune*.

Un monomio intero chiamasi **Minimo Comun Multiplo** di più monomi interi, (e si scrive m.c.m.) se: 1° Ha per coefficiente il minimo comun multiplo dei coefficienti dei monomi dati; 2° Ha tutti e soli i fattori letterali che si trovano in qualcuno dei monomi dati; 3° Ciascun suo fattore letterale ha per esponente il massimo esponente che il fattore stesso ha nei monomi dati. *

Esempio 1º. Dei monomi $12a^5b^2c^3$, $-4ab^3c^5$, $+10a^4b^3c^2$, il M.C.D. è $2ab^2c^2$; ed il m.c.m. è $60a^5b^3c^5$.

Esempio 2º. Dei monomi $5a^2b^3x^2y^4$, $-6a^3x^2$, $15a^2x^2y^2$, $10ab^4xy^2$, il M. C. D. è ax; ed il m.c.m. è $30a^3b^4x^2y^4$.

---

* È evidente l'analogia che esiste fra queste due definizioni e le regole dell'Aritmetica per trovare il M.C.D. ed il m.c.m. di più numeri interi scomposti in fattori primi.

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO.

68. TEOREMA. Per dividere un polinomio per un monomio, basta dividere ciascun termine del polinomio pel monomio, e poi sommare i quoti ottenuti.

Si abbia p.e. il polinomio $a-b+c-d$ da dividere per m; dico che basta dividere (secondo la regola della divisione dei monomi) ciascun termine del polinomio per m (si ottiene rispettivamente a/m, $-b/m$, $+c/m$, $-d/m$); e poi sommare (algebricamente) i risultati. Dico cioè che avremo:

$$(a-b+c-d):m=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Avrò dimostrato che $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}$ è veramente il quoto cercato, se dimostro che, moltiplicandolo pel divisore m, si ottiene per prodotto il dividendo $a-b+c-d$.

Pel teor. § 50, abbiamo:

$$\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}\right)m=\frac{a}{m}m-\frac{b}{m}m+\frac{c}{m}m-\frac{d}{m}m=a-b+c-d. \;*$$

Analogamente si dimostra:

$$(a-b+c-d):(-m)=-\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}.$$

Esempio 1°. $(12a^3b^5x-8a^2b^4x^5+16a^3b^2x^4):(-4a^2b^2x)=$
$=(12a^3b^5x):(-4a^2b^2x)+(-8a^2b^4x^5):(-4a^2b^2x)+$
$+(16a^3b^2x^4):(-4a^2b^2x)=-3ab^3+2b^2x^4-4ax^3.$

Esempio 2°. $(24x^4y^3z^2-12x^2y^3z^4-15xy^2z^3+3xyz):(3xyz)=$
$=(24x^4y^3z^2):(3xyz)+(-12x^2y^3z^4):(3xyz)+(-15xy^2z^3):(3xyz)+$
$+(3xyz):(3xyz)=8x^3y^2z-4xy^2z^3-5yz^2+1.$

69. DEFINIZIONE. Un polinomio intero si dice *divisibile per un monomio intero,* se esiste un polinomio intero che, moltiplicato pel monomio, dia per prodotto il polinomio.

Dal teorema precedente segue immediatamente la regola:

---

* Perchè, pel corollario del § 60, si ha: $\frac{a}{m}m=a$; $\frac{b}{m}m=b$; $\frac{c}{m}m=c$; $\frac{d}{m}m=d$.

REGOLA. Affinchè un polinomio intero, privo di termini simili, sia divisibile per un monomio intero, è necessario e sufficiente che ciascun termine del polinomio sia divisibile pel monomio. *

70. METTERE IN EVIDENZA UN FATTORE.

Quando tutti i termini di un polinomio sono divisibili per un monomio, se in luogo del dividendo si scrive il prodotto del divisore pel quoto, si dice che nel polinomio (dividendo) ***si è messo in evidenza un fattore*** (il divisore).

Esempio. *Nel polinomio* $15m^2np-10m^3n^2p^2+5m^3n^4$ *si metta in evidenza il fattore* $5mn$.

Se si divide il polinomio per $5mn$, si ottiene per quoto il polinomio $3mp-2m^2np^2+m^2n^3$. Dunque:

$$15m^2np-10m^3n^2p^2+5m^3n^4=5mn(3mp-2m^2np^2+m^2n^3).$$

REGOLA. Per mettere in evidenza un fattore comune a tutti i termini di un polinomio, basta scrivere, in luogo del polinomio, un prodotto di due fattori. Il 1º è il fattore che si vuol mettere in evidenza; il 2º è il quoto che si ottiene dividendo il polinomio dato per questo fattore. **

Osservazione. Generalmente si usa mettere in evidenza il M.C.D. dei termini del polinomio.

Esempio. *Si metta in evidenza il M.C.D. dei termini del polinomio* $18a^3b^4c-15a^2b^3c^4+21a^3b^2c^3-3a^2bc$. Si avrà:

$$18a^3b^4c-15a^2b^3c^4+21a^3b^2c^3-3a^2bc=3a^2bc(6ab^3-5b^2c^3+7abc^2-1).$$

---

* Se il polinomio non è divisibile pel monomio, ci contentiamo di indicare il quoto nel modo detto al § 59; oppure eseguiamo le divisioni parziali che si possono eseguire, e lasciamo indicate le altre. ESEMPIO. Il quoto di $4a^2b-2d+5ab^3$ per $2a$, è $\frac{4a^2b-2d+5ab^3}{2a}$; od anche $2ab-\frac{d}{a}+\frac{5}{2}b^3$.

** È evidente che il fattore che si mette in evidenza può essere indifferentemente positivo o negativo.

CAPO SESTO.

Delle Equazioni in generale.

PRINCIPALI PROPRIETÀ DELLE EGUAGLIANZE.

71.

1° Se è $a=b$, sarà $a+m=b+m$
2° Se è $a=b$, sarà $a-m=b-m$
3° Se è $a=b$, sarà $a\times m=b\times m$
4° Se è $a=b$, sarà $a:m=b:m$

e viceversa

5° Se è $a+m=b+m$, sarà $a=b$
6° Se è $a-m=b-m$, sarà $a=b$
7° Se è $a\times m=b\times m$, sarà $a=b$
8° Se è $a:m=b:m$, sarà $a=b$

9° Se è $a=a'$ e $b=b'$, sarà $a+b=a'+b'$
10° Se è $a=a'$ e $b=b'$, sarà $a-b=a'-b'$
11° Se è $a=a'$ e $b=b'$, sarà $a\times b=a'\times b'$
12° Se è $a=a'$ e $b=b'$, sarà $a:b=a':b'$

E viceversa:

13° Se è $a+b=a'+b'$ ed $a=a'$, sarà $b=b'$
14° Se è $a-b=a'-b'$ ed $a=a'$, sarà $b=b'$
15° Se è $a\times b=a'\times b'$ ed $a=a'$, sarà $b=b'$
16° Se è $a:b=a':b'$ ed $a=a'$, sarà $b=b'$

Osservazione. È sottinteso che, nel 4°, 7°, ed 8° caso, m deve essere diverso da zero: e che devono essere diversi da zero b, b' nel 12° caso; a, a' nel 15° caso; a, a', b, b' nel 16° caso.

Queste proprietà si sogliono esprimere così:

72. TEOREMA 1°. Se due numeri sono eguali, aumentati (o diminuiti) del medesimo numero, danno risultati eguali. E reciprocamente:

Se due numeri aumentati (o diminuiti) del medesimo numero danno risultati eguali, essi sono eguali.

TEOREMA 2°. Se due numeri sono eguali, moltiplicati (o divisi) pel medesimo numero diverso da zero, danno risultati eguali. E reciprocamente:

Se due numeri moltiplicati (o divisi) pel medesimo numero diverso da zero danno risultati eguali, essi sono eguali.

TEOREMA 3°. Sommando (o sottraendo) a membro a membro due eguaglianze, si ottiene ancora un'eguaglianza.

TEOREMA 4°. Moltiplicando (o dividendo) a membro a membro due eguaglianze i cui membri siano diversi da zero, si ottiene ancora una eguaglianza. *

DELLE EQUAZIONI IN GENERALE.

73. Si dice che un'eguaglianza è *da risolvere* quando si deve cercare quali valori bisogna dare a certe lettere che si trovano nell'eguaglianza affinchè l'eguaglianza sia verificata.

Un' eguaglianza da risolvere si chiama *equazione*. I numeri di cui si cerca il valore si chiamano *le incognite* dell'equazione. I valori delle incognite si chiamano anche *le radici* o *le soluzioni* dell'equazione; e si dice che *risolvono* o *verificano* l'equazione, o *soddisfano* all' equazione.

Potremo quindi dire:

74. DEFINIZIONE. ***Equazione* è un' eguaglianza da risolvere.**
***Risolvere un'equazione* significa trovarne le radici.**

Ogni monomio d'una equazione si chiama *un termine dell'equazione*.

Un termine d'una equazione si dirà *termine incognito* se contiene qualche incognita; *termine noto* se non contiene incognite.

Le prime lettere dell'alfabeto latino (dall'a all's compresa) si sogliono adoperare per rappresentare i numeri noti; e le ultime lettere (dalla t alla z compresa) per rappresentare le incognite. **

In grazia di questa convenzione, vedendo p.e. l'equazione

$$3ax+2bc=7m-4y+2x-b,$$

si sa che a, b, c, m sono numeri noti; e che x, y sono numeri incogniti.

---

* Questi teoremi furono dimostrati, pei numeri aritmetici, dal Sig. Peano, nei suoi *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Torino – Bocca 1889); ed è facilissimo, supponendo veri i teoremi pei numeri aritmetici, dimostrarli veri anche pei numeri con segno.

** Il più antico segno dell'uso delle lettere dell'alfabeto per rappresentare le grandezze, lo abbiamo in Aristotile, nato a Stagira nel 384 a. C., e morto nel 322. L'uso di rappresentare con lettere dell'alfabeto alcune potenze dell'incognita, lo abbiamo già in Diofanto di Alessandria (325-409), e negli scrittori arabi del VI secolo. Leonardo da Pisa, detto Fibonacci (1202), rappresenta, qualche rarissima volta, con lettere, anche i numeri noti. Il primo a fare uso costante e generale delle lettere, per denotare non solo le grandezze, i numeri incogniti e le loro potenze, ma anche i numeri noti, fu il Beato Giordano Nemorario di Sassonia, Superiore Generale dei Domenicani, morto nel 1236. Il Beato Giordano si potrebbe chiamare a buon diritto il padre del moderno calcolo letterale, se avesse fatto uso del segno =, e dei segni delle operazioni. Mancando di questi segni, egli dovette adoperare, nei suoi calcoli, (fatti sempre con sole lettere), un numero così grande di lettere, da renderne difficilissima la lettura. Fu Michele Stifel (1486-1567) che, pel primo, fece uso delle lettere e dei segni delle operazioni; ma la gloria di diffondere, presso i matematici d'Europa, il moderno calcolo letterale, spetta al matematico francese Francesco Viète (1540-1603). Viète rappresentava i numeri incogniti colle vocali, ed i numeri noti colle consonanti. Renato Descartes (1596-1650) introdusse poi l'uso di indicare, colle prime lettere dell'alfabeto, i numeri noti, e, colle ultime, i numeri incogniti.

In quest' equazione sono termini noti $+2bc$, $+7m$, $-b$; sono termini incogniti, gli altri.

75. DEFINIZIONE. Due equazioni si dicono *equivalenti* se hanno le medesime radici.

Esempio. Le due equazioni $3x+2=28$ e $15x+10=115$, le quali ammettono tutte e due l'unica radice $x=7$, sono equivalenti.

REGOLA. Per dimostrare che due equazioni sono equivalenti, bisognerà dimostrare che hanno le medesime radici; ossia che la 1ª ha tutte le radici della 2ª, e la 2ª ha tutte le radici della 1ª. *

È evidente che:

Due equazioni equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.

76. Data un'equazione qualsiasi, non si può scorgere, a prima vista, quali sono le due radici. Però se noi sapessimo trovare un'altra equazione *equivalente* alla proposta, è evidente che sarebbe indifferente fare la ricerca delle radici nell'una o nell'altra delle due equazioni; ossia risolvere l'una piuttosto che l'altra delle due equazioni equivalenti. Se la 2ª equazione è *più facile a risolversi*, noi avremo, se non risolto, certamente semplificato il problema. Se poi sapremo trovare una 3ª equazione equivalente alla 2ª (epperciò anche equivalente alla 1ª) e *più facile a risolversi*, noi avremo maggiormente semplificato il problema.

E se, proseguendo per questa via, arriveremo finalmente ad un'equazione *equivalente alla prima*, e tanto semplice che in essa si scorgano immediatamente le radici, noi avremo risolta l'equazione data.

Questo è appunto il metodo che seguiremo nella risoluzione delle equazioni.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLE EQUAZIONI.

77. I due membri d'una equazione sono, in generale, due polinomi. Per brevità rappresenteremo il 1° membro con A, ed il secondo con B; cosicchè un'equazione qualsiasi si sappresenterà brevemente con $A=B$.

Esempio. Se rappresentiamo l'equazione $5x+2y-2=7xy+3$ con $A=B$, sarà: $A=5x+2y-2$, e $B=7xy+3$.

78. TEOREMA 1°. Se ai due membri d'una equazione si aggiunge il medesimo numero, si ottiene una nuova equazione equivalente alla prima. **

---

* È da notare che, affinchè due equazioni siano *equivalenti*, non è sufficiente che *tutte* le radici della 1ª siano anche radici della 2ª; ma è anche necessario che *tutte* le radici della 2ª siano radici della 1ª. Così p.e. l'equazione $2x-3=7$ e la $x^2-9x+20=0$ non sono equivalenti, perchè la 1ª equazione ha la sola radice $x=5$, mentre la 2ª ha le due radici $x=5$ ed $x=4$.

** I teoremi ed i corollari di questo capitolo ci danno i mezzi per ricavare da una equazione altre equazioni ad essa equivalenti.

Sia p.e. l'equazione $A=B$, ed M un numero qualsiasi. Aggiungendo M ai due membri di $A=B$, ottengo $A+M=B+M$; ed aggiungendo $-M$ ai due membri di $A=B$, ottengo $A-M=B-M$. Dico che $A+M=B+M$ ed $A-M=B-M$ sono equivalenti ad $A=B$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teor. 1° § 72, se è $A=B$, sarà $A\pm M=B\pm M$; e viceversa, se è $A\pm M=B\pm M$, sarà $A=B$. Dunque i valori delle incognite che rendono $A=B$, renderanno $A\pm M=B\pm M$; e quelli che rendono $A\pm M=B\pm M$, renderanno $A=B$. Ossia: tutte le radici di $A=B$ sono radici di $A\pm M=B\pm M$; e tutte le radici di $A\pm M=B\pm M$ sono radici di $A=B$. Dunque $A=B$ ed $A\pm M=B\pm M$ sono equivalenti. *

COROLLARIO 1°. Sopprimendo un termine che si trovi nei due membri d'una equazione, si ottiene una nuova equazione equivalente alla prima.

Esempio. L'equazione $5x^2+2x-3=4x+5x^2+5$ è equivalente all'equazione $2x-3=4x+5$.

Infatti la 2ª si può ricavare dalla 1ª aggiungendo $-5x^2$ ai due membri della 1ª; poichè, così facendo, si ottiene:

$$5x^2+2x-3-5x^2=4x+5x^2+5-5x^2;$$

e, per la legge associativa dell'addizione (Coroll. 2° § 30),

$$2x-3+(5x^2-5x^2)=4x+5+(5x^2-5x^2); \text{ ossia}$$
$$2x-3+0=4x+5+0; \text{ ossia } 2x-3=4x+5.$$

COROLLARIO 2°. In un'equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro cambiandogli il segno. **

Esempio 1°. Se, nell'equazione $7xy+5x-2=8y-3+4x$, si sopprime $+4x$ nel 2° membro, e si scrive $-4x$ nel 1° membro, si ottiene l'equazione equivalente $7xy+5x-2-4x=8y-3$.

Infatti la 2ª si può ricavare dalla 1ª, aggiungendo $-4x$ ai due membri della 1ª.

Esempio 2°. Se nell'equazione $7x+2=-3x+4$, si sopprime $-3x$ nel 2° membro, e si scrive $+3x$ nel 1° membro, si ottiene l'equazione

---

* È sottinteso che M non ha la forma $m/0$, nè la forma $0/0$; e che non prende mai tali forme pei valori che noi attribuiremo alle lettere od alle incognite che esso contiene.

ESEMPIO: Se fosse $M=\frac{5x}{a-3}$, oppure $M=\frac{3x+2}{a-b}$, sarebbe sottinteso che noi non daremmo ad a il valore $a=3$ nel 1° caso, ed il valore $a=b$ nel 2° caso. Similmente, se fosse $M=\frac{3(a+b)}{x+4}$, sarebbe sottinteso che noi escluderemmo dalle nostre considerazioni il valore $x=-4$.

** L'espressione *si può* significa che, così facendo, si ottiene un'equazione equivalente all'equazione primitiva.

equivalente $7x+2+3x=4$. Infatti: la 2ª si può ottenere dalla 1ª aggiungendo $+3x$ ai due membri della 1ª.

COROLLARIO 3°. In un'equazione si possono trasportare tutti i termini nel primo membro.

Esempio. Si abbia p.e. l'equazione $3x^2-5=4xy+x-1$.

Aggiungendo ad ambi i membri $-4xy-x+1$, e facendo poi la riduzione dei termini simili, si ottiene:

$$3x^2-5-4xy-x+1=4xy+x-1-4xy-x+1;\ \text{ossia}$$
$$3x^2-5-4xy-x+1=0;\ \text{ossia}\ 3x^2-4xy-x-4=0.$$

E quest'equazione è equivalente alla proposta.

In questo caso, si suole dire che l'equazione data è stata **ridotta a zero.** *

È evidente la seguente proposizione:

Cambiando di posto i due membri d'una equazione, si ottiene una equazione equivalente alla prima.

Ossia sono equivalenti le due equazioni $A=B$ e $B=A$. Infatti: Dire che *A è eguale a B*, è lo stesso che dire che *B è eguale ad A*.

79. TEOREMA 2°. Se i due membri d'una equazione si moltiplicano o si dividono per un medesimo numero diverso da zero, si ottiene una nuova equazione equivalente alla prima. **

DIMOSTRAZIONE. *Sia p.e. l'equazione $A=B$, e sia M un numero diverso da zero; dico che l'equazione $AM=BM$ è equivalente alla $A=B$, e che l'equazione $A:M=B:M$ è equivalente alla $A=B$.*

1° Caso. *$AM=BM$ è equivalente ad $A=B$.*

Pel teor. 2° § 72, se è $A=B$, sarà $AM=BM$; e se è $AM=BM$, sarà $A=B$. Dunque i valori delle incognite che rendono $A=B$ renderanno $AM=BM$; e quelli che rendono $AM=BM$ renderanno $A=B$. Ossia tutte le radici di $A=B$ sono anche radici di $AM=BM$, e tutte le radici di $AM=BM$ sono anche radici di $A=B$. Ne segue che $A=B$ ed $AM=BM$ sono equivalenti.

2° Caso. *$A:M=B:M$ è equivalente alla $A=B$.*

Si dimostra come nel 1° Caso.

Esempio 1°. Moltiplicando ambi i membri (ossia tutti i termini ***)

---

* Il primo esempio di equazioni *ridotte a zero* l'abbiamo nell'*Arithmetica integra* di Michele Stifel, edita a Nürnberg nel 1544. Il ***ridurre a zero*** le equazioni giovò a scoprire molte ed importantissime proprietà delle radici delle equazioni.

** Se il numero M è scritto sotto forma di espressione algebrica contenente delle lettere, volendo noi che M sia diverso da zero, escluderemo dalla nostra considerazione quei valori delle lettere che rendono $M=0$.

*** Perchè per moltiplicare un polinomio per un numero si moltiplicano tutti i termini del polinomio per questo numero.

dell'equazione $\frac{5x}{2a}+\frac{7}{2a}=\frac{3x}{2a}-\frac{9}{2a}$ per $2a$, (supposto che sia $a \gtrless 0$) si ottiene l'equazione equivalente $5x+7=3x-9$.

Esempio 2°. Dividendo per 5 ambi i membri dell' equazione $5x+25=20x-10$, si ottiene l'equazione equivalente $x+5=4x-2$. *

COROLLARIO. Cambiando il segno a tutti i termini d'una equazione, si ottiene una nuova equazione equivalente alla prima.

Esempio. L'equazione $-7x+3=-5-6x$ è equivalente all'equazione $7x-3=5+6x$. Infatti la 2ª si ottiene dalla 1ª moltiplicandone ambi i membri (ossia tutti i termini) per -1. **

Osservazione. Non accade mai che i due membri d'una equazione si moltiplichino o si dividano esplicitamente per *zero*. Ma ciò può avvenire inconsciamente quando si moltiplicano o si dividono ambi i membri per una espressione algebrica M contenente lettere, alle quali poi si danno valori tali che rendano $M=0$. Ciò accadrebbe p.e. se si moltiplicassero o si dividessero ambi i membri d'una equazione per $3(a-b)$, o per $a-2c$, e poi si ponesse, nel 1° caso, $a=b$, e nel 2°, $a=2c$.

80. Il teor. 2° § 79 ci dà il mezzo di ricavare da un'equazione, avente termini frazionari, un' altra equazione equivalente alla data, e priva di termini frazionari; o come si suol dire, ***per liberare l'equazione dai denominatori.*** Basta infatti moltiplicare ambi i membri (ossia tutti i termini dell' equazione) per un multiplo qualsiasi dei divisori; perchè allora ogni termine frazionario verrà ad essere moltiplicato pel proprio divisore, e quindi darà per prodotto il dividendo; come si può vedere nel seguente esempio:

Esempio. *Si liberi dai denominatori l'equazione:*

$$\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}-6=\frac{9x}{2}+\frac{4}{7} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Moltiplicando ambi i membri (ossia tutti i termini) dell' equazione pel prodotto 3.5.2.7 dei denominatori, si ottiene l'equazione equivalente:

$$\frac{x}{3}.3.5.2.7+\frac{2x}{5}.3.5.2.7-6.3.5.2.7=\frac{9x}{2}.3.5.2.7+\frac{4}{7}.3.5.2.7.$$

Poichè, pel coroll. § 60, si ha: $\frac{x}{3}.3=x$, avremo:

$$\frac{x}{3}.3.5.2.7=x.5.2.7.$$

* Questo teorema ci fa conoscere che si può sopprimere un fattore diverso da zero che sia comune a tutti i termini d'una equazione. Si ottiene così una nuova equazione equivalente alla prima, e, sovente, più facile a risolversi. (È conveniente abituarsi a far questa soppressione in ogni caso).

** Ciò si suol fare quando il primo termine è negativo.

Per la legge commutativa della moltiplicazione (coroll. 1° § 39) e pel coroll. del § 60, si avrà:

$$\frac{2x}{5}.3.5.2.7 = \frac{2x}{5}.5.3.2.7 = 2x.3.2.7.$$

$$\frac{9x}{2}.3.5.2.7 = \frac{9x}{2}.2.3.5.7 = 9x.3.5.7.$$

$$\frac{4}{7}.3.5.2.7 = \frac{4}{7}.7.3.5.2 = 4.3.5.2.$$

Cosicchè l'equazione prenderà la forma:

$x.5.2.7+2x.3.2.7—6.3.5.2.7=9x.3.5.7+4.3.5.2$ . . . . . . (β)

ossia $70x+84x—1260 = 945x+120$.

Quest'equazione è equivalente all'equazione data, e non ha più denominatori.

Confrontando le due equazioni equivalenti (α), (β), se ne ricava immediatamente la seguente regola:

REGOLA PER LIBERARE UN'EQUAZIONE DAI DENOMINATORI.

Per liberare un'equazione dai denominatori, basta sopprimere tutti i denominatori, e moltiplicare ciascun termine dell'equazione pel prodotto di tutti gli altri denominatori. *

Osservazione 1ª. I termini interi si devono moltiplicare pel prodotto di tutti i denominatori.

Osservazione 2ª. È più comodo (quando lo si sa trovare facilmente) moltiplicare tutti i termini pel *m.c.m.* dei denominatori. Ad ogni modo, è sempre utile far uso del più piccolo fra i multipli comuni che si possono *facilmente* trovare. In questo caso, la regola si può enunciare così:

Regola. *Per liberare un'equazione dai denominatori, basta sopprimere tutti i denominatori, e moltiplicare ciascun termine dell'equazione pel quoto che si ottiene dividendo il multiplo comune a tutti i denominatori pel denominatore corrispondente.* **

---

* Siamo ora in grado di dare l'etimologia della parola *Algebra*. Il più antico libro che porti questo titolo è di Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, scrittore arabo, nato nella provincia di Chwarizm, verso il 759 dell'Era Volgare, ed ha per titolo *Al-dschebr wa'l-mukâbala*. La parola *al* è un articolo, *Dschebr* (che fu tradotto letteralmente in latino per *restauratio*) significa *accomodare una rottura*, ed è il nome che gli Arabi diedero a quella operazione, la quale consiste nel liberare l'equazione dalle frazioni, cioè dalle rotture. *Mukâbala* (che fu tradotto in latino per *oppositio*) significa *mettere a confronto*, ed è il nome che gli Arabi diedero a quell'operazione, la quale consiste nel cercare (mettere *in evidenza*, mettere *a confronto*) i termini eguali che si trovano in ciascuno dei due membri d'una equazione, per sopprimerli. Muhammed diede questo titolo al libro, perchè il libro era destinato, in modo speciale, alla risoluzione delle equazioni. In seguito, i libri che trattavano delle equazioni furono, dai latini, intitolati *Scientia restaurationis et oppositionis*, ed anche *De algebra et almucabala:* infine si adoperò solo la prima parte, e si intitolarono semplicemente *Algebra*.

** I termini interi si possono considerare come termini frazionari aventi per denominatore l'unità positiva.

CAPO SETTIMO.

Equazioni di 1° grado ad un' incognita. *

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UN' INCOGNITA.

81. DEFINIZIONE. Un' equazione ad una sola incognita si dice di primo grado se contiene solamente termini in cui l' incognita ha l'esponente 1, e termini noti. **

Sia data un'equazione qualunque di 1° grado ad una incognita; e sia p.e. x l'incognita. Si potrà sempre: 1° raccogliere nel primo membro tutti i termini incogniti, e nel secondo tutti i termini noti; 2° Mettere in evidenza il fattore x comune a tutti i termini del primo membro, il quale (se a è la somma algebrica dei coefficienti dell' incognita) prenderà la forma ax; 3° Indicare con b il secondo membro, il quale è composto di soli termini noti. Si vede allora che ogni equazione di 1° grado ad una incognita potrà assumere la forma $ax=b$. ***

Se a è diverso da zero, potremo dividere per a ambi i membri della $ax=b$, ed otterremo (teor. 2° es. 2° § 79) l'equazione equivalente $x=\frac{b}{a}$ la quale ci dà direttamente il valore dell'incognita. La $x=\frac{b}{a}$ si chiama la *formola di risoluzione* dell' equazione $ax=b$, perchè indica quale operazione conviene fare sopra a e b per risolvere la $ax=b$.

Esempio. *Si risolva l'equazione* $\frac{2x+3}{2}-\frac{3x}{5}=\frac{5}{4}x-\frac{x+15}{10}$.

Moltiplicandone (teor. 2° § 79) ambi i membri per 2.2.5, che è il m.c.m. dei divisori, si ha:

$$\frac{2x+3}{2}.2.2.5-\frac{3x}{5}.2.2.5=\frac{5}{4}x.2.2.5-\frac{x+15}{10}.2.2.5, \quad \text{ossia}$$

$$(2x+3).2.5-3x.2.2=5x.5-(x+15).2, \quad \text{ossia}$$

$$(2x+3).10-12x=25x-(x+15).2, \quad \text{ossia}$$

$$20x+30-12x=25x-2x-30.$$

---

* Il più antico documento contenente la risoluzione delle equazioni di 1° grado ad un' incognita è un papiro egiziano scritto da Ahmes in un' epoca incerta, però compresa fra il 2000 ed il 1700 prima dell'Era Cristiana. In questo papiro, il segno dell'eguaglianza è $\leftarrow$.

** Si ricordi la nota al § 47.

*** Cambiando, se occorre, il segno (coroll. § 79) a tutti i termini della $ax=b$, possiamo far sì che a sia sempre positivo; b, poi, può essere positivo o negativo.

E trasportando (coroll. 2° § 78) i termini incogniti nel 1° membro, ed i termini noti nel 2°, si ha: $20x—12x—25x+2x=—30—30$, ossia $—15x=—60$. E cambiando il segno (coroll. § 79) ai due membri, si ottiene $15x=60$, da cui $x=\frac{60}{15}=4$.

82. Dall'esempio precedente si ricava facilmente la regola:

REGOLA PER RISOLVERE UN'EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

1°. Si libera l'equazione dai denominatori.

2°. Si tolgono le parentesi, eseguendo tutte le operazioni indicate.

3°. Si trasportano nel 1° membro tutti i termini incogniti, e nel 2° membro tutti i termini noti.

4°. Si fa la riduzione dei termini simili, raccogliendo in un solo termine tutti i termini contenenti l'incognita; e si cambia il segno a tutti i termini, se il coefficiente dell'incognita è negativo.

5°. Si dividono ambi i membri pel coefficiente dell'incognita. *

DISCUSSIONE DELLA FORMOLA DI RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

83. Abbiamo già visto (§ 81) che ogni equazione di 1° grado ad un'incognita si può scrivere sotto la forma $ax=b$, ove a, b sono interi; e che la formola di risoluzione è $x=\frac{b}{a}$; inoltre a si può sempre supporre positivo, e b può essere positivo o negativo.

Esaminiamo ora sotto quali forme si può presentare il valore di x.

1° CASO. $\left\{\begin{array}{l}a \textit{ diverso da zero} \\ b \textit{ diverso da zero}\end{array}\right.$. Il valore di x sarà intero o frazionario, secondochè b è divisibile o non è divisibile per a. Sarà positivo, se b è positivo; sarà negativo, se b è negativo.

2° CASO. $\left\{\begin{array}{l}a \textit{ diverso da zero} \\ b \textit{ eguale a zero}\end{array}\right.$. La formola di risoluzione dà $x=\frac{0}{a}$, o, come si suole scrivere, (ponendo $a=m$) $x=\frac{0}{m}$. In questo caso, l'equazione ha la forma $ax=0$. Ora è evidente che solo il valore $x=0$ può soddisfare quest'equazione, la quale avrà la sola soluzione $x=0$. **

* È evidente che non sono sempre necessarie, in ogni caso, tutte queste operazioni: nè è sempre conveniente eseguirle proprio nell'ordine con cui sono indicate nella Regola.

** Sappiamo infatti (coroll. 2° § 39) che, affinchè un prodotto sia *zero*, è necessario e sufficiente che sia *zero* uno dei fattori. Ora a è diverso da *zero*; dunque dovendo essere $ax=0$, dovrà essere $x=0$.

3º CASO. $\begin{cases} a \text{ eguale a zero} \\ b \text{ diverso da zero} \end{cases}$. La formola di risoluzione dà $x = \frac{b}{0}$, o, come si suole scrivere, (ponendo $b = m$) $x = \frac{m}{0}$. In questo caso, l'equazione ha la forma $0.x = b$. Ora è evidente che, essendo b diverso da zero, non esiste alcun numero che moltiplicato per *zero*, dia per risultato b. Dunque il risultato $x = \frac{m}{0}$ significa che non vi è alcun numero che verifichi l'equazione. Ciò si suole esprimere dicendo:

Il risultato $x = \frac{m}{0}$ è indizio di impossibilità.

4º CASO. $\begin{cases} a \text{ eguale a zero} \\ b \text{ eguale a zero} \end{cases}$. Il valore di x prende la forma $x = \frac{0}{0}$.
In questo caso, l' equazione ha la forma $0.x = 0$. Ora è evidente che qualsiasi valore si dia ad x, l'equazione è soddisfatta; perchè qualsiasi numero, moltiplicato per *zero*, dà *zero* per risultato. Dunque qualsiasi valore di x verifica l' equazione; e si dirà che l' *equazione è indeterminata.* Si suole esprimere questo fatto dicendo:

Il risultato $x = \frac{0}{0}$ è indizio di indeterminazione. *

Riassunto.

$$ax=b \begin{cases} a \gtrless 0,\ b \gtrless 0, \begin{cases} \text{una ed una sola soluzione diversa da } zero, \\ \text{intera o frazionaria, positiva o negativa.} \end{cases} \\ a \gtrless 0,\ b=0, \text{ una ed una sola soluzione eguale a } zero. \\ a=0,\ b \gtrless 0, \text{ nessuna soluzione.} \\ a=0,\ b=0, \text{ infinite soluzioni.} \end{cases}$$

Osservazione. Escludendo il caso $a=0$, potremo dire:

Ogni equazione di 1° grado ad un' incognita ammette sempre una ed una sola soluzione.

---

* Non sempre il valore $\frac{0}{0}$ è indizio di indeterminazione. Si abbia p.e. $x = \frac{(m-n)b}{(m-n)a}$. Per qualsiasi valore di m e di n, eccetto per il valore $m=n$, la differenza $m-n$ è diversa da *zero*, e noi possiamo sopprimere il fattore $m-n$ comune al numeratore ed al denominatore, e scrivere $x = \frac{(m-n)b}{(m-n)a} = \frac{b}{a}$. Si pone perciò la *convenzione* che la frazione $\frac{(m-n)b}{(m-n)a}$, la quale ha sempre il valore $\frac{b}{a}$, tranne quando è $m=n$, abbia il medesimo valore anche quando è $m=n$. Con questa convenzione si potrà dire che, *per ogni valore di m e di n, è sempre* $\frac{(m-n)b}{(m-n)a} = \frac{b}{a}$. Ne segue la regola:

***REGOLA.** Quando il valore di x ha la forma $^0/_0$, bisogna prima osservare se questa forma deriva dalla presenza di un fattore comune al numeratore ed al denominatore. In tal caso, il vero valore di x è quello che si ottiene sopprimendo quel fattore comune il quale, col suo annullarsi, dava ad x la forma $^0/_0$.*

§ 83

RISOLUZIONE ALGEBRICA DEI PROBLEMI DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

Preliminari e regola.

84. Ogni equazione è l'espressione algebrica di un problema.

P.e. l'equazione $3x+4=\frac{x}{5}-1$ è l'espressione del *Problema: Si trovi un numero x il cui triplo aumentato di* 4 *sia eguale alla quinta parte del medesimo numero diminuito di* 1. Viceversa non si può dire che *ogni problema algebrico* sia esprimibile per mezzo di equazioni; perchè vi sono problemi contenenti condizioni implicite od esplicite, le quali non si possono esprimere coi segni ordinari dell'Algebra. Tali sono p.e. tutti i problemi in cui si cerca un numero di uomini; perchè contengono, implicitamente, la condizione che il numero cercato sia *intero.* Questa condizione non si può esprimere coi segni ordinari dell'Algebra, e perciò non è possibile introdurla nell'equazione. *

Vediamo ora che cosa si può fare per risolvere un problema per mezzo delle equazioni, limitandoci alla considerazione dei problemi di 1° grado ad una incognita; ossia a quei problemi la cui risoluzione si può far dipendere solamente dalla risoluzione di un'equazione di 1° grado ad una incognita.

1° CASO. Il problema è numerico, ed esprimibile per mezzo di un'equazione. ** 1°. *Si mette in equazione il problema*, ossia si scrive l'equazione che rappresenta il problema.

2°. *Si risolve l'equazione;* e la radice dell'equazione sarà la soluzione del problema.

2° CASO. Il problema è numerico, e contiene condizioni non trascrivibili in equazione. 1°. *Si mette in equazione il problema* prescindendo dalle condizioni non trascrivibili, e si avrà così un'equazione rappresentante il medesimo problema, ma spogliato delle condizioni non trascrivibili in equazione. ***

2°. *Si risolve l'equazione.*

3°. *Si verifica* se la radice trovata è anche soluzione del problema, e la si rigetta nel caso contrario. ****

---

* Per maggiori indicazioni sulla natura dei problemi algebrici si può consultare: NASSÒ - *Algebra Elementare ad uso dei Licei*, pag. 50 e seg.

** Per comodità di locuzione diremo che un problema algebrico è *numerico* o *letterale*, secondochè i dati del problema sono espressi coi numeri del sistema decimale, o con lettere.

*** In questo caso non potremo più affermare che la radice dell'equazione sarà anche soluzione del problema. Essa soddisferà certamente a tutte le condizioni che furono trascritte, ma potrebbe non soddisfare alle altre.

**** Alcune volte è un po' scomodo accertarsi se tutte le condizioni del problema sono state trascritte in equazione. E quindi cosa utile abituarsi a verificare *in ogni*

3º CASO. Il problema è letterale. 1º. *Si mette in equazione il problema* come nel 1º e nel 2º caso.

2º. *Si risolve l'equazione.*

3º. *Si fa la discussione del problema;* ossia si determina entro quali limiti devono essere compresi i valori dei dati del problema, affinchè la soluzione dell'equazione sia anche soluzione del problema. Si cerca inoltre per quali valori particolari dei dati del problema la soluzione di questo presenta delle particolarità degne di osservazione.

Riassumendo abbiamo:

REGOLA PER RISOLVERE UN PROBLEMA ALGEBRICO.

1º. Si mette in equazione il problema;

2º. Si risolve l'equazione;

3º. α) Se il problema è numerico ed interamente trascrivibile in equazione, la radice dell'equazione sarà la soluzione del problema.

β) Se il problema è numerico e non interamente trascrivibile in equazione, si verifica se la radice dell'equazione soddisfa al problema.

γ) Se il problema è letterale, si fa la discussione del problema. *

Problemi determinati.

85. DEFINIZIONE. Diremo che un problema algebrico è *determinato* quando ha un numero limitato di soluzioni.

Se esso è di 1º grado ad un'incognita, ed interamente trascrivibile in equazione, darà origine ad un'*equazione determinata.*

Esempio. PROBLEMA. *Si trovi un numero i cui* $^3/_4$ *diminuiti di* 5 *siano eguali ai* $^2/_5$ *del medesimo numero aumentati di* 16.

Risoluzione. Sia x il numero cercato. I $^3/_4$ del numero li rappresenteremo scrivendo $\frac{3}{4}x$. Allora i $\frac{3}{4}$ del numero diminuiti di 5 li rap-

---

caso se la radice dell'equazione è anche soluzione del problema. La radice dell' equazione può essere *positiva* o *negativa*, *intera* o *frazionaria*. *Se è intera e positiva*, generalmente soddisfa anche al problema. *Se è frazionaria e positiva*, soddisfa, in generale, anche al problema, purchè questo ammetta, per soluzion une numero frazionario. *Se è negativa*, non soddisfa al problema, eccetto in casi rarissimi.

* Nella risoluzione algebrica di un problema di 1º grado ad un'incognita, la 2ª parte, cioè *la risoluzione dell'equazione*, non presenta alcuna difficoltà, sapendo noi risolvere qualsiasi equazione di 1º grado ad un'incognita. La 3ª parte, cioè la *discussione*, sovente non è necessaria, perchè il problema è numerico; del resto essa, generalmente, non è difficile. La difficoltà principale consiste nel mettere il problema in equazione. Stante la grande varietà di problemi, non è possibile dar regole generali per metterli in equazione; daremo alcuni consigli pratici e molti esempi nella 2ª parte, nel capitolo: *Risoluzione algebrica dei problemi di* 1º *grado ad un' incognita.*

presenteremo con $\frac{3}{4}x-5$. Similmente, i $\frac{2}{5}$ del numero aumentati di 16 li rappresenteremo con $\frac{2}{5}x+16$. Dovendo queste due espressioni essere eguali fra loro, scriveremo $\frac{3}{4}x-5=\frac{2}{5}x+16$. È evidente che tutte le condizioni del problema furono trascritte in equazione; epperciò questa equazione di 1° grado ad un' incognita è la trascrizione algebrica del problema. La radice dell'equazione sarà la soluzione del problema. Risolvendo l'equazione, otteniamo successivamente:

$\frac{3}{4}x-5=\frac{2}{5}x+16$, ossia $\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}x=16+5$, ossia $\frac{7}{20}x=21$, ossia $7x=420$, ossia $x=\frac{420}{7}=60$.

Risposta. Il numero cercato è 60.

Problemi indeterminati.

86. DEFINIZIONE. Diremo che un problema algebrico è *indeterminato* quando ammette un numero illimitato di soluzioni.

Se esso è di 1° grado ad una incognita, ed interamente trascrivibile in equazione, darà origine ad una *equazione indeterminata*.

Esempio. PROBLEMA. *Si trovi un numero i cui $^3/_5$ diminuiti di $^1/_3$ del numero stesso siano eguali ai $^4/_{15}$ del medesimo numero.*

Risoluzione. Sia x il numero cercato. Dovrà essere:

$\frac{3}{5}x-\frac{1}{3}x=\frac{4}{15}x$, ossia $\frac{3}{5}x-\frac{1}{3}x-\frac{4}{15}x=0$, ossia $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}-\frac{4}{15}\right)x=0$, ossia $0.x=0$. Da cui $x={}^0/_0$.

Risposta. La soluzione $x={}^0/_0$ è indizio di indeterminazione, e fa conoscere che qualsiasi numero risponde alle esigenze del problema.

Problemi impossibili.

87. DEFINIZIONE. Diremo che un problema algebrico è *assurdo* od *impossibile* quando contiene condizioni o assurde in se stesse, od incompatibili fra loro.

Se esso è di 1° grado ad una incognita, ed interamente trascrivibile in equazione, darà origine ed un'equazione assurda, la cui radice avrà la forma ${}^m/_0=\infty$; il che è indizio di *impossibilità.* *

---

* Non è però da credere che tutte le volte che si ha $x={}^m/_0$ il problema non ammetta soluzione; infatti vi sono problemi geometrici, in cui, al valore $x={}^m/_0=\infty$, corrisponde una soluzione ***vera e reale*** del problema.

Se invece esso contiene condizioni non trascrivibili in equazione, darà origine ad un'equazione, la quale non rappresenta *tutto intero* l'enunciato del problema. In tal caso *può darsi* che l'equazione sia assurda; ma *può anche darsi* che l'equazione ammetta una soluzione, ed allora esisterà un numero che soddisferà a tutte le condizioni trascritte nell'equazione, e non alle altre; esso soddisferà all'equazione senza soddisfare al problema.

Esempio. PROBLEMA. *Si trovi un numero di due cifre, in cui la cifra delle decine sia doppia di quella delle unità; e la quinta parte del numero diminuito di* 3 *sia eguale a* 54.

Risoluzione: Sia x la cifra delle unità; quella delle decine sarà $2x$; e poichè una decina vale 10 unità, $2x$ decine varranno $10.2x=20x$ unità. Il numero cercato è eguale alla somma delle sue unità e delle sue decine, cioè ad $x+20x$. La quinta parte del numero diminuito di 3 sarà eguale a $\frac{x+20x-3}{5}$. Avremo perciò l'equazione $\frac{x+20x-3}{5}=54$, ossia $21x-3=270$, ossia $21x=273$, ossia $x=13$.

Risposta. La cifra delle unità sarebbe 13, *e quella delle decine* 26; *ma ciò non può essere*: *dunque il problema è impossibile.*

Osservazione. Il valore $x=13$ soddisfa all'equazione, ma non al problema; perchè questo contiene le condizioni sottintese, e non trascrivibili in equazione, che i due numeri cercati siano *interi*, *positivi*, e ciascuno *d'una cifra sola.*

Soluzioni negative.

88. Alcune volte, l'impossibilità del problema è originata dal fatto che il problema richiede per soluzione un numero *positivo*, mentre la radice dell'equazione è un numero *negativo*. In questi casi per rendere il problema *possibile*, basterebbe cambiare alcuni dati numerici del problema. Non volendo ciò fare, è spesso facile trovare un altro problema, il cui enunciato *si scosti pochissimo* dall'enunciato del problema primitivo, ed abbia i medesimi dati numerici e la medesima soluzione, ma positiva. Per raggiungere questo scopo, ci è utile il seguente teorema.

89. TEOREMA. Cambiando il segno a tutti e soli i termini contenenti l'incognita, la radice d'una equazione di 1° grado ad una incognita cambia il segno, ma non il suo valore numerico.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo (come si è visto al § 81) che ogni equazione di 1° grado ad un' incognita si può scrivere sotto la forma $ax=b$; ove x è l' incognita, a la somma algebrica dei coefficienti di x; e b la somma algebrica dei termini noti. Ora, se nell'equazione data si cambia il segno *a tutti, e soli*, i termini contenenti l'incognita, si viene a cambiare il segno *a tutti, e soli*, i termini che

formano la somma a; epperciò *cambierà il segno, ma non il valore numerico di* a, mentre b rimane inalterato. Se dunque la primitiva equazione si può ridurre alla forma $ax = b$, da cui si ricava $x = {}^b/_a$, l'equazione modificata si potrà ridurre alla forma $-ax = b$, da cui si ricaverà $x = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$. Ove si vede che la radice ha cambiato segno, ma non valore numerico.

90. Quando, nel risolvere un problema, si trova che l'equazione ha la radice negativa, si può operare nel seguente modo:

1°. Se la grandezza rappresentata dall'incognita può avere due qualità opposte, p.e. le qualità d'essere *tempo passato* o *futuro*, *somma guadagnata* o *perduta*, ecc., e se col segno $+$ si è rappresentata una di queste due qualità, il segno $-$ della radice indicherà che la grandezza cercata ha la qualità opposta. *

Esempio. Se la qualità d'esser *guadagno* si rappresenta col $+$, e la domanda del problema è *Quante lire ho guadagnato?* e la radice è p.e. -3, si dovrà rispondere *Ho perduto lire* 3.

2°. Sia che la grandezza possa avere due qualità opposte, sia che non le possa avere, noi potremo sempre ritornare all'equazione ricavata trascrivendo il problema in equazione, e cambiare in essa il segno *a tutti e soli* i termini contenenti l'incognita. L' equazione così ottenuta avrà per radice la radice dell' equazione primitiva presa col segno $+$.

Se la natura dell'incognita (nel caso speciale di cui si tratta) è tale da ammettere un doppio senso (come sarebbe *guadagno* o *perdita*, *passato* o *futuro* ecc.) si trascrive in linguaggio ordinario quest'equazione, accostandosi, per quanto è possibile, al dettato del problema primitivo. Si ottiene così *il problema modificato* che si cercava.

Se invece la natura dell'incognita non è tale da ammettere un doppio senso, l'equazione così ottenuta non sarà trascrivibile in linguaggio ordinario. Allora si utilizza il coroll. del § 79, e si cambia il segno a tutti i termini dell'equazione ottenuta col primo cambiamento parziale dei segni. Se l'equazione che ne risulta è trascrivibile in linguaggio ordinario, la si trascrive accostandosi, per quanto è possibile, al dettato del problema primitivo, e si ottiene così il *problema modificato* che si cercava. Se invece non è trascrivibile in linguaggio ordinario, *il problema non è modificabile senza cambiare i dati numerici.*

Esempio. Problema. *Pietro riceve la mercede di* 15 *giorni di lavoro; Giacomo che guadagna L.* 3 *di meno al giorno, riceve la*

---

* Il primo che in Europa abbia interpretato le soluzioni negative dei problemi, fu Leonardo da Pisa nel 1202. Prima di lui queste soluzioni erano, dai matematici europei, chiamate *soluzioni false* e, come tali, rigettate. Però nel 500 gli Indiani le interpretavano già; ed è probabile che Leonardo da Pisa, il quale soggiornò lungo tempo in Oriente, ne abbia imparato da loro l'interpretazione.

mercede di 12 *giorni di lavoro: giuocano poi due partite fra loro. Nella prima Pietro guadagna L.* 28, *e nella seconda ne perde* 40. *Dopo ciò i due operai possiedono la medesima somma. Qual'è la paga giornaliera di ciascuno?*

Risoluzione. Sia x il numero di lire che Pietro riceve di paga giornaliera; Giacomo riceverà L. $x-3$. Per 15 giorni di lavoro Pietro avrà ricevuto $15x$ lire; e Giacomo, per 12 giorni di lavoro, ne avrà ricevute $(x-3)12$. Ma Pietro prima guadagna L. 28, e poi ne perde 40; dunque alla fine delle due partite avrà L. $15x+28-40$. Giacomo invece prima perde 28 lire, e poi ne guadagna 40; dunque alla fine avrà lire $(x-3)12-28+40$. Ma devono possedere la medesima somma; avremo quindi l'equazione

$$15x+28-40=(x-3)12-28+40 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

ossia $15x-12x=-12$, ossia $3x=-12$, da cui $x=-4$.

La paga di Pietro sarebbe di -4 lire; ma ciò non può essere, non potendo la paga d'un operaio essere negativa.

Cambiamo dunque nella (1) il segno *a tutti e soli* i termini contenenti l'incognita, ed avremo

$$-15x+28-40=(-x-3)12-28+40 \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

La (2) ha per radice $x=4$; ma essa non è trascrivibile in linguaggio ordinario, perchè la paga dell'operaio non può essere negativa.

Cambiamo dunque il segno a tutti i termini della (2), ed otterremo:

$$15x-28+40=(x+3)12+28-40 \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

che è equivalente alla (2), e quindi avrà anch'essa per radice $x=4$.

Traducendo la (3) in linguaggio ordinario, avremo il seguente problema:

Problema. *Pietro riceve la mercede di* 15 *giorni di lavoro; Giacomo che guadagna lire* 3 ***di più** al giorno, riceve la mercede di* 12 *giorni di lavoro: giuocano poi due partite fra loro. Nella prima Pietro **perde** lire* 28, *e nella seconda ne **guadagna*** 40. *Dopo ciò i due operai possiedono la medesima somma. Qual'è la paga giornaliera di ciascuno?*

Questo problema ci dà $x=4$. Per cui:

Risposta. La paga giornaliera di Pietro è di L. 4; *quella di Giacomo è di L.* 7. *

---

* Non diamo esempi di discussione dei problemi, perchè i problemi che dovrà risolvere il Maestro Elementare sono sempre numerici; ed anche per non aumentare di soverchio la mole del libro. Chi desiderasse vedere esempi di discussione dei problemi può consultare: Nassò — *Algebra Elementare ad uso dei Licei,* pag. 70, 71, e pag. 294 e seguenti.

APPENDICE

Estrazione della radice quadrata. *

PRELIMINARI.

91. TEOREMA. Il quadrato di un numero che abbia unità e decine è eguale al quadrato delle decine, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità.

DIMOSTRAZIONE. Sia per esempio 148 il numero dato; sarà evidentemente: $148 = 14\,\text{decine} + 8\,\text{unità}$; e quindi (pel teor. 2° § 60) si avrà:

$$148^2 = (14\,\text{dec.} + 8\,\text{un.})^2 = (14\,\text{dec.})^2 + 2(14\,\text{dec.})(8\,\text{un.}) + (8\,\text{un.})^2.$$

Analogo ragionamento si fa sopra ogni altro numero avente unità e decine.

COROLLARIO. Il quadrato delle decine è un numero di centinaia; ed il doppio prodotto delle decine per le unità è un numero di decine.

DIMOSTRAZIONE. Ponendo nell'esempio preced. 10.14 invece di 14 dec., si ha: $(14\,\text{dec.})^2 = (10.14)^2 = 10^2.14^2 = 100 \times 14^2 = 1\,\text{cent.} \times 14^2 = 14^2$ centinaia.

Similmente si ha $2(14\,\text{dec.})(8\,\text{un.}) = 2.(10.14).8 = 2.10.14.8 = 10.(2.14.8) =$ $= 1\,\text{dec.} \times (2.14.8) = 2.14.8$ decine.

Analogo ragionamento si fa sopra ogni altro numero avente unità e decine.

92. DEFINIZIONE. Dicesi *radice quadrata* di un numero, un numero il cui quadrato è eguale al numero dato.

La radice quadrata del numero a si indica scrivendo $\sqrt[2]{a}$, o più semplicemente $\sqrt{a}$. Il numero di cui si prende la radice si chiama *radicando.*

Esempi. Il quadrato di 5 è 25; dunque 5 è la radice quadrata di 25, ossia $5 = \sqrt{25}$.

Il quadratro di 7 è 49; dunque 7 è la radice quadrata di 49, ossia $7 = \sqrt{49}$.

Il quadrato di 1 è 1; dunque 1 è la radice quadrata di 1, ossia $1 = \sqrt{1}$.**

* La parola *radice* è la traduzione letterale dell'indiano *mûla*, che significa *base della potenza*, ed anche *radice delle piante.* Le espressioni *radice quadrata, radice cubica*, sono la traduzione letterale delle espressioni indiane *varga mûla, ghana mûla.*

** Il segno di radice quadrata fu introdotto, quasi contemporaneamente, dall'arabo Alkalsâdî. e dal frate Luca Paciolo, nato in Borgo S. Sepolcro (Toscana) nel 1445, e morto nel 1515. Ambedue usarono per segno di radice quadrata l'iniziale della parola *radice*; con questa differenza però che, mentre Alkalsâdî poneva quest'iniziale sopra il radicando, Luca Paciolo la poneva a sinistra del radicando. Paciolo scriveva ℞ invece di scrivere la sola iniziale R, ed adoperò questo segno ℞ nella sua opera pubblicata nel 1470. In seguito Nicola Chuquet adottò, nel suo libro edito nel 1484, il segno ℞ per tutte le radici; e scrisse $℞^1$, $℞^2$, $℞^3$, $℞^4$, ecc. al posto

93. Due numeri interi consecutivi tali che i loro quadrati siano l'uno minore di a, e l'altro maggiore di a, si chiameranno *radici quadrate di a approssimate a meno d'una unità:* il minore si chiamerà *radice quadrata a meno d'una unità per difetto;* il maggiore, *radice quadrata a meno d'una unità per eccesso.*

Il numero minore si suole chiamare semplicemente *radice quadrata intera di a;* ed in generale:

Dicesi *radice quadrata intera* di un numero a, il maggior numero intero il cui quadrato non supera a.

Due frazioni aventi per numeratori due numeri interi consecutivi, ed aventi egual denominatore n, e tali che i loro quadrati siano l'uno minore di a, e l'altro maggiore di a, si chiameranno *radici quadrate di a approssimate a meno di* $\frac{1}{n}$. La minore delle due frazioni si chiamerà *radice quadrata di a approssimata a meno di* $\frac{1}{n}$ *per difetto;* la maggiore, *radice quadrata di a approssimata a meno di* $\frac{1}{n}$ *per eccesso.*

Esempio. Se $\left(\frac{8}{15}\right)^2 > a$ e $\left(\frac{7}{15}\right)^2 < a$, sarà $\frac{8}{15}$ la radice quadrata di a a meno di $\frac{1}{15}$ per eccesso, e $\frac{7}{15}$ la radice quadrata di a a meno di $\frac{1}{15}$ per difetto.

Dicesi *resto dell'estrazione della radice quadrata di un numero* il resto che si ottiene quando dal numero si sottrae il quadrato della sua radice approssimata per difetto.

Esempio. Il numero 70 non è quadrato, e la sua radice quadrata intera è 8. Sottraendo 8^2 da 70, si ottiene per resto 6. Il numero 6 si chiama il resto della estrazione della radice quadrata intera di 70.

Osservazione. Se un numero è quadrato, sottraendone il quadrato della sua radice quadrata, si ottiene per resto *zero.*

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA INTERA DEI NUMERI INTERI.

94. Esamineremo separatamente diversi casi particolari.

1º CASO. RADICE QUADRATA INTERA DI UN NUMERO INTERO DI UNA O DI DUE CIFRE.

---

di radice 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, ecc. Il Matematico tedesco Rudolff (o Ludolff) stampò nel 1525 un trattato d'algebra in cui introdusse i segni $\surd$, $\surd\surd\surd$, $\surd\surd$, per indicare rispettivamente *radice quadrata, radice cubica, radice quarta.* I seguaci di Rudolff usarono per le radici quadrata e cubica, un solo segno $\surd$, scrivendovi a destra l'iniziale della parola *quadrato, cubo.* Così p.e. per indicare la radice cubica di $a+b$, scrivevano $\surd_{c}\,\llcorner a+b \lrcorner$, od anche $\surd_{c}(a+b)$ od anche $\surd_{c}\,\overline{a+b}$. Poscia, allungando il tratto orizzontale, si scrisse $\sqrt{{}_{c}\,a+b}$; infine si tolse anche l'iniziale delle parole quadrato, cubo, e si mise un numero nell' apertura del segno $\sqrt{}$.

Non vi è alcuna regola; queste radici si devono sapere a memoria. Basta a tal fine, conoscere il quadrato dei numeri interi da 1 a 9.

2° CASO. RADICE QUADRATA INTERA DI UN NUMERO INTERO DI 3 O DI 4 CIFRE.

Si abbia p.e. da estrarre la radice quadrata intera di 7548. Questo numero è compreso fra 100 e 10000; lo sua radice quadrata sarà perciò compresa fra $\sqrt{100}$ e $\sqrt{10000}$, (ossia fra 10 e 100) e quindi avrà due cifre.

La radice quadrata di 7548 (indicandone con a la cifra delle decine, e con b la cifra delle unità) si potrà rappresentare con $10.a+b$. Se r è il resto della estrazione di radice, sarà evidentemente:

$$7548=(10.a+b)^2+r=100.a^2+10.2ab+b^2+r;$$

e poichè $100.a^2$ è un numero di centinaia, e $10.2ab$ un numero di decine, potremo anche scrivere:

$$7548=a^2\text{cent.}+2ab\,\text{dec.}+b^2+r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

ove $r=0$ se 7548 è quadrato.

1°. ***Ricerca delle decine della radice.*** Dalla (1) si scorge che le a^2 cent. del 1° addendo devono essere contenute nelle 75 cent. di 7548, ossia che a^2 deve essere contenuto in 75. Ora il maggior quadrato contenuto in 75 è 64; e dico che sarà $a^2=64$, ossia $a=8$. Dimostrerò questo, dimostrando che non può essere $a>8$, nè $a<8$.

Non può essere $a>8$. Infatti: essendo 8^2 (cioè 64) il maggior quadrato contenuto in 75, se fosse $a>8$, non potrebbe più a^2 essere contenuto in 75.

Non può essere $a>8$. Infatti: essendo 8^2 contenuto in 75, 8^2 cent. saranno contenute in 75 cent., ossia in 7500; e tanto più 8^2 cent. saranno contenute in 7548. Ma $8^2\text{cent.}=100.8^2=10^2.8^2=(10.8)^2=80^2$. Dunque il quadrato di 80 è contenuto in 7548, epperciò la radice quadrata di 7548 non è inferiore ad 80. Ne segue che la cifra delle decine della radice non è inferiore ad 8

Abbiamo così provato che la cifra delle decine della radice quadrata di 7548 è 8. Dunque:

Per trovare la cifra delle decine della radice, basta, nel numero dato, separare con un punto le centinaia dalle decine, ed estrarre la radice quadrata intera del numero che si trova alla sinistra del punto.

2°. ***Ricerca delle unità della radice.*** Nella eguaglianza (1), possiamo sostituire ad a il suo valore 8, ed otterremo:

$7548=8^2$ cent.$+2.8.b$ dec.$+b^2+r$, ossia
$7548=64$ cent.$+16.b$ dec.$+b^2+r$, ossia
$7548-6400=16.b$ dec.$+b^2+r$, ossia *
$1148=16.b$ dec.$+b^2+r$ . . . . (2)

75'48	86	
64	167	166
114'8	7	6
99 6		
15 2		

Dall'eguaglianza precedente si scorge che l'addendo $16.b$ dec. è tutto contenuto nella somma 1148; e poichè $16.b$ dec. è un numero esatto di decine, se esso deve essere contenuto in 1148, dovrà essere contenuto nelle

* Sottraendo 64 cent. $=6400$ da ambi i membri dell'eguaglianza.
Si osservi poi che per sottrarre 64 cent. (ossia 6400) da 7548, basta sottrarre 64 dal gruppo delle cent., ed alla destra del risultato scrivere il gruppo 48. Così si è fatto nell'Esempio.

114 dec. di 1148; sarà quindi 16.b dec. contenuto in 114 dec., ossia 16.b contenuto in 114.

Se fosse esattamente $16.b = 114$, dividendo 114 per 16 si otterrebbe per quoto il valore di b. Ma [come si scorge dalla (2)] nelle 114 dec. di 1148 vi possono essere decine provenienti dalla somma degli addendi b^2 ed r. Ne segue che, dividendo 114 per 16, si ottiene per quoto il valore di b, oppure un numero maggiore di b.

Ciò che abbiamo fatto lo possiamo esprimere così:

Trovata la cifra delle decine della radice, la si eleva al quadrato, ed il numero ottenuto si sottrae dal gruppo delle centinaia del numero dato. Alla destra del resto (che chiameremo resto parziale) si scrive il gruppo formato dalle decine ed unità del numero dato. Nel numero che ne risulta, si separano con un punto le decine dalle unità, ed il numero che si trova alla sinistra del punto si divide pel doppio della cifra delle decine della radice. Il quoziente intero che si ottiene sarà la cifra delle unità della radice, oppure una cifra troppo grande.

Dividendo 114 per 16, si ottiene per quoziente intero 7. Sarà perciò 7 eguale a b, oppure 7 maggiore di b. Per verificare questo, basta porre nella (2) il 7 al posto di b, e si deve ottenere $1148 = 16.7\,\text{dec.} + 7^2 + r$ (2') ove dobbiamo ricordare che r può anche avere il valor *zero*. Affinchè sia vera la (2'), deve essere $16.7\,\text{dec.} + 7^2$ non superiore a 1148.

Calcolando, * si trova che è $16.7\,\text{dec.} + 7^2 = 1169$. Dunque la cifra 7 è troppo grande.

Proviamo la cifra 6, ed avremo $16.6\,\text{dec.} + 6^2 = 996$. Poichè 996 non è superiore a 1148, sarà 6 il valore di b. Sarà quindi $a = 8$ e $b = 6$, epperciò la radice cercata è 86. Sostituendo nella (2) a b il suo valore 6, si ottiene:

$$1148 = 16.6\,\text{dec.} + 6^2 + r = 96\,\text{dec.} + 36 + r \quad \text{ossia} \quad 1148 = 996 + r \quad . \quad . \quad (3)$$

Da cui si ha: $1148 - 996 = r$, ossia $152 = r$.

Ne segue che la radice quadrata intera di 7548 è 86 con 152 di resto.

Ciò che abbiamo fatto ultimamente lo possiamo esprimere così:

Per verificare se il quoziente intero ottenuto è veramente la cifra delle unità della radice, si scrive questo quoziente a destra del doppio della cifra delle decine della radice, ed il numero che ne risulta si moltiplica pel quoto stesso. Se questo prodotto si può sottrarre dal numero formato dal resto parziale seguito dal gruppo scrittogli a destra, il quoziente trovato è la cifra cercata delle unità della radice, In caso contrario, si esperimentano successivamente le cifre inferiori, finchè si ottenga

* Per trovare comodamente il valore di $16.7\,\text{dec.} + 7^2$, si osservi che, ponendo in evidenza il fattore 7, si ha $16.7\,\text{dec.} + 7^2 = (16\,\text{dec.} + 7).7 = (160 + 7).7 = 167.7$. Dove si scorge che basta scrivere 7 alla destra di 16 (che è il doppio della cifra delle decine della radice), e moltiplicare per 7 il numero che ne risulta.

Il prodotto 167.7 dovendosi sottrarre da 1148, bisognerebbe scriverlo sotto il numero 1148. Ma, siccome non sappiamo se tale sottrazione si potrà eseguire o non, è meglio scrivere a parte il prodotto 167.7, e se questo prodotto non si può sottrarre da 1148, si diminuisce d'una unità il moltiplicatore, e si prova il prodotto 166.6; se anche questo prodotto è troppo grande, si diminuisce ancora d'una unità il moltiplicatore, e si prova il prodotto 165.5; e così si continua (se occorre) finchè si ottenga un prodotto che si possa sottrarre da 1148. Questo prodotto si scriverà sotto il 1148, e si farà la sottrazione. Così si fece nell'Esempio.

Analogamente si opererà in casi analoghi.

un prodotto che si possa sottrarre. L'ultima cifra esperimentata è la cifra delle unità della radice, ed il resto di questa sottrazione sarà il resto dell'estrazione della radice.

3º CASO. RADICE QUADRATA INTERA DI UN NUMERO INTERO AVENTE PIÙ DI 4 CIFRE.

Si abbia p.e. da estrarre la radice quadrata intera di 75481523.

Poichè il numero dato ha più di due cifre, la sua radice quadrata intera ha più d'una cifra, ossia è un numero avente unità e decine.

Sappiamo già che il quadrato delle decine della radice è un numero di centinaia; e che, estraendo la radice quadrata intera dalle centinaia del numero dato, si ottengono le decine della radice. Siamo perciò condotti a separare con un punto le centinaia dalle decine di 75481523, ed a cercare la radice quadrata intera di 754815. Questa radice sarà il numero delle decine della radice cercata. Trovate le decine, troveremo poi le unità col metodo indicato nel 2º caso. Siamo così ridotti ad estrarre la radice quadrata intera del numero 754815, che ha due cifre di meno del numero dato.

La radice quadrata intera di 754815 ha anch'essa unità e decine; e le decine si ottengono estraendo la radice quadrata intera dalle centinaia di 754815, ossia da 7548. Siamo così condotti a separare con un punto le centinaia dalle decine di 754815, e ad estrarre la radice quadrata intera del numero 7548 che ha due cifre di meno di 754815.

Poichè 7548 ha quattro sole cifre, ne sappiamo estrarre la radice quadrata intera.

La radice quadrata intera di 7548 sarà il numero delle decine della radice di 754815. Trovate le decine della radice di 754815, si troveranno (col metodo indicato nel 2º caso) le unità della radice di 754815; e così sarà trovata la radice quadrata intera di 754815.

Questa radice sarà il numero delle decine della radice quadrata intera di 75481523; e trovate le decine, troveremo poi col metodo solito anche le unità della radice quadrata intera di 75481523.

Quest' ultima radice sarà la radice quadrata intera cercata.

Osservazione. Si capisce facilmente che, qualunque sia il numero di cifre del numero dato, tenendo la via sopra indicata, si arriverà sempre ad un numero di 3 o di 4 cifre, la cui radice quadrata intera si sa estrarre.

Esempio. Nell'esempio si è estratta la radice quadrata intera di 75481523, e si è ottenuto 8688 per radice intera e 179 di resto. *

```
75·48·15·23 | 8688
64          |--------------
------      | 167    166
114·8       |   7      6
 996        | ----   ----
---------   |        1728
 1521·5     |           8
 13824      |        -----
----------  |        17368
   13912·3  |            8
   138944   |        -----
   -------  |
       179  |
```

95. Da quanto precede si ricava facilmente la seguente regola:

REGOLA PER ESTRARRE LA RADICE QUADRATA INTERA DI UN NUMERO INTERO.

1º. Si scompone il numero dato in gruppi di due cifre, partendo da destra. L'ultimo gruppo a sinistra può anche avere una sola cifra.

---

* Per trovare il doppio di 86, ci è bastato fare la somma 166+6. Infatti si ha evidentemente: 86.2 = (8 dec. +6 un.)×2 = 8 dec.×2+6 un.×2 = 16 dec. +6 un. +6 un. = 160 un. +6 un.+6 un. = = 166 un. +6 un. Analogamente, per avere il doppio di 868, ha bastato fare la somma 1728+8. Analogamente si farà negli altri casi.

2º. Si estrae la radice quadrata intera del 1º gruppo a sinistra, e si ottiene la 1ª cifra (a sinistra) della radice.

3º. Si fa il quadrato di questa cifra, e lo si sottrae dal 1º gruppo (a sinistra) del numero dato.

4º. A destra del resto ottenuto (che chiameremo 1º resto parziale) si scrive il 2º gruppo, e si separa con un punto la cifra delle unità del numero che ne risulta.

5º. Si divide il numero che è alla sinistra del punto per il doppio della cifra già trovata della radice. Il quoziente intero ottenuto sarà la 2ª cifra della radice, oppure una cifra troppo grande. La si verifica scrivendola a destra del doppio della cifra già trovata alla radice, e moltiplicando il numero che ne risulta per la cifra stessa. Se questo prodotto si può sottrarre dal numero formato dal 1º resto parziale seguito dal gruppo scrittogli a destra, la cifra trovata è buona. In caso contrario, si esperimentano successivamente le cifre inferiori finchè si ottenga un prodotto che si possa sottrarre. L'ultima cifra esperimentata sarà la 2ª cifra della radice.

6º. Alla destra del resto ottenuto (che chiameremo 2º resto parziale) si scrive il 3º gruppo, e si separa con un punto la cifra delle unità del numero risultante.

7º. Si divide il numero che è alla sinistra del punto pel doppio del numero già trovato alla radice. Il quoziente intero ottenuto sarà la 3ª cifra della radice, oppure una cifra troppo grande; e la si esperimenta come si è fatto precedentemente.

8º. Si continua così finchè si sia operato su tutti i gruppi che formano il numero dato. L' ultimo resto sarà il resto dell' estrazione della radice quadrata intera. *

Osservazioni. 1ª. Se il numero dato è quadrato, il resto è *zero.*

2ª. Se l'operazione fu ben condotta, sommando il resto col quadrato della radice trovata, si ottiene il numero dato.

3ª. Se una di quelle divisioni che si fanno per trovare una cifra della radice dà per quoto intero *zero,* si opera su questo *zero* come si opererebbe se il quoto fosse una cifra significativa. Dall'esempio, si scorge che basta scrivere *zero* alla destra del numero già trovato alla radice, ed anche alla destra del doppio di questo numero; poi scrivere un altro gruppo alla destra di quell'ultimo gruppo che fu scritto a destra dell'ultimo resto parziale ottenuto, e continuare poscia l'operazione al modo solito.

10·26·56·16	3204
9	
12·6	62
124	2
25·6	640
000	0
2561·6	6404
25616	4
0	

4ª. Se si ottenesse un resto parziale eguale a *zero,* e vi fossero ancora gruppi di *zeri* da adoperare, si scrivono alla destra del numero già trovato alla radice tanti *zeri* quanti sono i gruppi di *zeri* non ancora adoperati. Il numero che ne risulta sarà la radice cercata.

5ª. La radice quadrata intera avrà tante cifre quanti sono i gruppi in cui è stato scomposto il numero dato.

---

* Questa regola è, in sostanza, quella che diede Teone d'Alessandria nel suo *Commentario sull'Almagesto di Tolomeo.* Teone d'Alessandria nacque verso il 320, e morì verso il 395 dell'Era Volgare.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA DELLE FRAZIONI.

96. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI IL NUMERATORE ED IL DENOMINATORE SONO QUADRATI.

Problema. *Si estragga la radice quadrata di* $\frac{9}{25}$.

Risoluzione. Dalla nota relazione $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a.a}{b.b} = \frac{a^2}{b^2}$ si scorge che il quadrato di una frazione è una frazione che ha per numeratore il quadrato del numeratore, e per denominatore il quadrato del denominatore. Quindi, per trovare la radice quadrata di $\frac{9}{25}$, basterà trovare una frazione che abbia per numeratore un numero il cui quadrato sia 9, e per denominatore un numero il cui quadrato sia 25. Perciò la frazione $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$ sarà la radice quadrata cercata.

Ne segue evidentemente la regola:

REGOLA. ***La radice quadrata d'una frazione ordinaria in cui il numeratore ed il denominatore sono quadrati è una frazione ordinaria che ha per numeratore la radice quadrata del numeratore, e per denominatore la radice quadrata del denominatore della frazione data.***

97. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI IL SOLO DENOMINATORE È QUADRATO.

Problema. *Si estragga la radice quadrata di* $\frac{33}{64}$.

Risoluzione. La radice quadrata intera di 33 è 5; la radice quadrata intera di 64 è 8; ed è $\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$ e $\left(\frac{6}{8}\right)^2 = \frac{36}{64}$. Poichè $\frac{33}{64}$ è compreso fra $\frac{25}{64}$ e $\frac{36}{64}$, la radice quadrata di $\frac{33}{64}$ sarà compresa fra la radice quadrata di $\frac{25}{64}$ e la radice quadrata di $\frac{36}{64}$, ossia fra $\frac{5}{8}$ e $\frac{6}{8}$. Poichè $\frac{5}{8}$ e $\frac{6}{8}$ differiscono fra loro di $\frac{1}{8}$, la radice quadrata di $\frac{33}{64}$ differirà da $\frac{5}{8}$ e da $\frac{6}{8}$ per meno di $\frac{1}{8}$. Diremo perciò che $\frac{5}{8}$ è la radice quadrata di $\frac{33}{64}$ a meno di $\frac{1}{8}$ per difetto, e che $\frac{6}{8}$ è la radice quadrata di $\frac{33}{64}$ a meno di $\frac{1}{8}$ per eccesso. Ne segue la regola:

REGOLA. ***La radice quadrata (per difetto) d'una frazione ordinaria in cui il solo denominatore è quadrato è una frazione ordinaria che ha per numeratore la radice quadrata intera del numeratore, e per denominatore la radice quadrata del denominatore della frazione data.***

Osservazione 1a. La radice quadrata (per eccesso) si ottiene aumen d'una unità il numeratore della radice quadrata per difetto.

Osservazione 2a. Chiamando n il denominatore delle radici quadrate approssimate per difetto o per eccesso, così ottenute, queste radici saranno approssimate a meno di $\frac{1}{n}$.

98. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI NÈ IL NUMERATORE, NÈ IL DENOMINATORE SONO QUADRATI.

Problema. Si estragga la radice quadrata di $\frac{23}{7}$.

Risoluzione. Poichè il numeratore ed il denominatore non sono quadrati, potremo facilmente ritornare al 2° caso, moltiplicando p.e. i due termini della frazione pel denominatore. Così facendo avremo : $\frac{23}{7}=\frac{23.7}{7.7}=\frac{161}{7^2}$.

Estraendo la radice quadrata di $\frac{161}{7^2}$, si avrà la radice quadrata cercata.

La radice quadrata intera di 161 è 12, e la radice quadrata di 7^2 è 7; sarà quindi $\frac{12}{7}$, la radice quadrata di $\frac{23}{7}$ a meno di $\frac{1}{7}$ per difetto.

REGOLA. Per estrarre la radice quadrata di una frazione ordinaria in cui nè il numeratore nè il denominatore sono quadrati, si moltiplicano ambi i termini della frazione pel denominatore. La radice quadrata della frazione così ottenuta sarà la radice quadrata cercata. *

Osservazione 1a. Se, prima di moltiplicare ambi i termini della frazione pel denominatore, si riduce la frazione ai minimi termini, si ottiene talvolta una frazione i cui termini sono quadrati. P.e. la frazione $\frac{32}{98}$ ha i due termini non quadrati; ma, riducendola ai minimi termini, si trova $\frac{32}{98}=\frac{16}{49}$. In questo caso, sarebbe meglio estrarre la radice quadrata di $\frac{16}{49}$ piuttosto che estrarre la radice quadrata di $\frac{32}{98}$.

Osservazione 2a. Se è dato un numero misto, conviene ridurlo prima sotto forma di frazione ordinaria. P.e. invece di $3\frac{2}{7}$ si adopera $\frac{23}{7}$.

99. FRAZIONE DECIMALE.

Si può scrivere la frazione decimale sotto forma di frazione ordinaria; e si rientra così in uno dei tre casi precedenti. Alla radice quadrata trovata si potrà poi sempre dare la forma di numero decimale.

Problema 1o. Si estragga la radice quadrata di 7,5076.

Risoluzione. Avremo $7{,}5076=\frac{75076}{10000}$. Sarà perciò $\sqrt{7{,}5076}=\sqrt{\frac{75076}{10000}}=$

* Questa regola si trova già nella *Triparty en la science des nombres* di Nicola Chuquet, pubblicata nel 1484.

$=\frac{\sqrt{75076}}{\sqrt{10000}}=\frac{\sqrt{75076}}{100}$. La radice intera di 75076 è 274, e quindi la radice cercata è $\frac{274}{100}=2{,}74$.

Problema 2°. Si estragga la radice quadrata di 2634,503.

Risoluzione. Rendiamo pari * il numero delle cifre decimali, scrivendo uno zero a destra di 2634,503, ed avremo $2634{,}503=2634{,}5030=\frac{26345030}{10000}$.

Perciò: $\sqrt{2634{,}503}=\sqrt{2634{,}5030}=\sqrt{\frac{26345030}{10000}}=\frac{\sqrt{26345030}}{\sqrt{10000}}=\frac{\sqrt{26345030}}{100}$.

La radice quadrata intera di 26345030 è 5132; e quindi la radice cercata è 51,32.

Da quanto precede si ricava facilmente la seguente regola:

REGOLA.* *Per estrarre la radice quadrata da un numero decimale, si rende pari (se non lo è) il numero delle cifre decimali, collo scrivere uno zero alla destra del numero dato. Poi si estrae la radice quadrata intera del numero che ne risulta, senza tener conto della virgola decimale. Però, appena si scrive a destra d'uno dei resti parziali il 1° gruppo di cifre decimali, si pone la virgola decimale alla radice, e poi si continua l'operazione come se questa virgola decimale non esistesse.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA CON UNA DATA APPROSSIMAZIONE.

100. TEOREMA. La radice quadrata di un numero a intero o frazionario, approssimata per difetto a meno di $\frac{1}{n}$ (per n intero e positivo), è una frazione ordinaria che ha per denominatore n, e per numeratore la radice quadrata intera del prodotto an^2.

Dimostrazione. Si ha evidentemente $a=\frac{an^2}{n^2}$. Perciò la radice quadrata di a sarà eguale alla radice quadrata di $\frac{an^2}{n^2}$, la quale si ottiene appunto scrivendo una frazione che abbia per denominatore n e per numeratore la radice quadrata intera di an^2.

Poichè è $\sqrt{a}=\sqrt{\frac{an^2}{n^2}}=\frac{\sqrt{an^2}}{n}$, se indichiamo con x la radice quadrata intera di an^2, avremo evidentemente $\frac{x}{n}<\sqrt{a}$, ed $\frac{x+1}{n}>\sqrt{a}$. Dunque $\frac{x}{n}$ è la radice quadrata di a approssimata a meno di $\frac{1}{n}$ per difetto. **

* Si rende pari il numero delle cifre decimali affinchè il denominatore della frazione ordinaria equivalente alla frazione decimale abbia un numero pari di zeri, e quindi sia un quadrato.

** Se il numero dato è una frazione, nel calcolare il valore del numeratore di $\frac{an^2}{n^2}$, conviene moltiplicare prima a per n^2, e poi estrarre gli intieri dal prodotto Se invece si estraessero prima da a gli intieri (oppure si riducesse prima a in frazione decimale. approssimata), e poi si moltiplicasse per n solamente la parte intera (oppure la frazione decimale approssimata che si è ottenuta), si andrebbe a pericolo di avere un valore non sufficientemente approssimato.

Problema 1º. Si estragga la radice quadrata di 7 approssimata per difetto a meno di $\frac{1}{5}$.

Risoluzione. Si ha $7 = \frac{7.5^2}{5^2} = \frac{175}{5^2}$. E poichè la radice quadrata intera di 175 è 13, la radice quadrata cercata sarà $\frac{13}{5}$.

Problema 2º. Si estragga la radice quadrata di $6\frac{2}{3}$ *approssimata per difetto a meno di* $\frac{1}{8}$.

Risoluzione. Avremo $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3} = \frac{\frac{20}{3}\times 8^2}{8^2} = \frac{\frac{1280}{3}}{8^2} = \frac{426\frac{2}{3}}{8^2}$.

Si estrae la radice quadrata intera di $426\frac{2}{3}$; e per ciò fare, basta estrarre la radice quadrata intera di 426; essa è 20. Dunque $\frac{20}{8}$ ossia $2\frac{1}{2}$ è la radice quadrata cercata.

Osservazione 1ª. Trovata la radice quadrata approssimata a meno di $\frac{1}{n}$ per difetto, aumentandone d'una unità il numeratore, si otterrà la radice quadrata approssimata a meno di $\frac{1}{n}$ per eccesso.

Osservazione 2ª. L'enunciato del teorema può servire di regola.

101. Se n è una potenza di 10, la moltiplicazione per 10^2 si fa scrivendo alla destra del numero dato tante coppie di zeri, oppure trasportando verso destra la virgola decimale di tante coppie di cifre, quanti sono gli zeri di n.

Per dividere poi per n la radice intera trovata, basterà alla destra della radice separare colla virgola decimale tante cifre quanti sono gli zeri contenuti in n. Praticamente si può operare come è indicato nella seguente regola:

REGOLA PER ESTRARRE DA UN NUMERO INTERO O FRAZIONARIO LA RADICE QUADRATA A MENO DI $1/n$, ESSENDO n UNA POTENZA INTERA E POSITIVA DI 10.

1º. Si scrive il numero dato sotto forma di frazione decimale avente tante coppie di cifre decimali quanti sono gli zeri di n; e se mancano cifre decimali, vi si supplisce con zeri.

2º. Si estrae la radice quadrata intera del numero ottenuto, seguendo la regola del § 99.

Problema 1º. Si estragga la radice quadrata di 2 a meno di $\frac{1}{100}$.

Risoluzione. Si scrive 2 = 2,0000. Si estrae la radice quadrata intera di 20000, e si ottiene 141. La radice quadrata cercata sarà 1,41.

Problema 2º. Si estragga la radice quadrata di 6,213 a meno di $\frac{1}{1000}$.

Risoluzione. Si scrive $6{,}213 = 6{,}213000$. Si estrae la radice quadrata intera di 6213000, e si ottiene 2492. La radice quadrata cercata sarà 2,492.

Problema 3°. *Si estragga la radice quadrata di* $7\frac{3}{20}$ *a meno di* $\frac{1}{100}$.

Risoluzione. Si riduce $7\frac{3}{20}$ sotto forma di frazione decimale con due coppie di cifre decimali, e si ottiene $7\frac{3}{20} = 7{,}1500$. Si estrae la radice quadrata intera di 71500, e si ottiene 267. La radice quadrata cercata sarà 2,67.

Problema 4°. *Si estragga la radice quadrata di* $4\frac{17}{111}$ *a meno di* $\frac{1}{10000}$.

Risoluzione. Si riduce $4\frac{17}{111}$ sotto forma di frazione decimale con quattro coppie di cifre decimali, e si ottiene $4\frac{17}{111} = 4{,}15315315$. Si estrae la radice quadrata intera di 415315315, e si ottiene 20379. La radice quadrata cercata sarà 2,0379.

Estrazione della radice cubica

PRELIMINARI.

102. TEOREMA. Il cubo di un numero che abbia unità e decine è eguale al cubo delle decine, più il triplo prodotto del quadrato delle decine per le unità, più il triplo prodotto delle decine pel quadrato delle unità, più il cubo delle unità.

DIMOSTRAZIONE. Sia p.e. 148 il numero dato; sarà evidentemente:

148 = 14 dec. + 8 un.; e quindi (pel teor. 4° § 57) si avrà:

$148^3 = (14 \text{ dec.} + 8 \text{ un.})^3 =$

$= (14 \text{ dec.})^3 + 3(14 \text{ dec.})^2 (8 \text{ un.}) + 3(14 \text{ dec.})(8 \text{ un.})^2 + (8 \text{ un.})^3.$

Analogo ragionamento si fa sopra ogni altro numero avente unità e decine.

COROLLARIO. Il cubo delle decine è un numero di migliaia; il triplo prodotto del quadrato delle decine per le unità è un numero di centinaia; il triplo prodotto delle decine pel quadrato delle unità è un numero di decine; ed il cubo delle unità è un numero di unità.

DIMOSTRAZIONE. Ponendo nell'esempio preced. 10.14 invece di 14 dec., si ha:

$(14 \text{ dec.})^3 = (10.14)^3 = 10^3.14^3 = 1000.14^3 = 1 \text{ migl.} \times 14^3 = 14^3$ migliaia.

$3(14 \text{ dec.})^2 (8 \text{ un.}) = 3.(10.14)^2.8 = 3.10^2.14^2.8 = 3.100.14^2.8 = 100.3.14^2.8 =$

$= 3.14^2.8$ centinaia.

$3(14 \text{ dec.})(8 \text{ un.})^2 = 3.(10.14).8^2 = 3.10.14.8^2 = 10.3.14.8^2 = 3.14.8^2$ decine.

Evidentemente $(8 \text{ un.})^3$ è un numero di unità.

Analogo ragionamento si fa sopra ogni altro numero avente unità e decine.

103. DEFINIZIONE. Dicesi *radice cubica* di un numero, un numero il cui cubo è eguale al numero dato.

La radice cubica del numero a si indica scrivendo $\sqrt[3]{a}$.

Il numero di cui si prende la radice si chiama *radicando.*

Esempi. Il cubo di 4 è 64; dunque 4 è la radice cubica di 64, ossia $4 = \sqrt[3]{64}$.

Il cubo di 6 è 216; dunque 6 è la radice cubica di 216, ossia $6 = \sqrt[3]{216}$.

Il cubo di 1 è 1; dunque 1 è la radice cubica di 1, ossia $1 = \sqrt[3]{1}$.

Osservazione. Intendiamo di estendere alle radici cubiche ciò che si disse nel § 93 intorno alle radici quadrate.

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA INTERA DEI NUMERI INTERI.

104. Esamineremo separatamente diversi casi particolari.

1° CASO. RADICE CUBICA INTERA DI UN NUMERO INTERO NON AVENTE PIU' DI 3 CIFRE.

Non vi è alcuna regola; queste radici si devono sapere a memoria. Basta a tal fine conoscere il cubo dei numeri interi da 1 a 9. *

2º CASO. RADICE CUBICA INTERA DI UN NUMERO INTERO AVENTE PIU' DI 3 CIFRE E NON PIU' DI 6 CIFRE.

Si abbia p.e. da estrarre la radice cubica intera di 248783. Questo numero è compreso fra 1000 e 1 000 000, ossia fra 10^3 e 100^3; la sua radice cubica sarà perciò compresa fra $\sqrt[3]{10^3}$ e $\sqrt[3]{100^3}$, ossia fra 10 e 100; e quindi avrà due cifre.

La radice cubica di 248783 (indicandone con a la cifra delle decine, e con b la cifra delle unità) si potrà rappresentare con $10.a+b$. Se r è il resto dell'estrazione di radice, sarà evidentemente:

$$248783=(10.a+b)^3+r=(10.a)^3+3.(10.a)^2.b+3.(10.a).b^2+b^3+r=$$
$$=1000.a^3+100.3a^2b+10.3ab^2+b^3+r.$$

E poichè $1000.a^3$ è un numero di migliaia, $100.3a^2b$ è un numero di centinaia, e $10.3ab^2$ è un numero di decine, potremo anche scrivere:

$$248783=a^3\,\text{migl.}+3a^2b\,\text{cent.}+3ab^2\,\text{dec.}+b^3+r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ove $r=0$ se 248783 è cubo.

1°. ***Ricerca delle decine della radice.*** Dalla (1) si scorge che le a^3migl. del 1° addendo devono essere contenute nelle 248 migl. di 248783, ossia che a^3 deve essere contenuto in 248. Ora il maggior cubo contenuto in 248 è 216; e dico che sarà $a^3=216$, ossia $a=6$. Dimostrerò questo, dimostrando che non può essere $a>6$, nè $a<6$.

Non può essere $a>6$. Infatti: essendo 6^3 (cioè 216) il maggior cubo contenuto in 248, se fosse $a>6$, non potrebbe più a^3 essere contenuto in 248.

Non può essere $a<6$. Infatti: essendo 6^3 contenuto in 248, 6^3migl. saranno contenute in 248 migl., ossia in 248000; e tanto più 6^3 migl. saranno contenute in 248783. Ma $6^3\text{migl.}=1000.6^3=10^3.6^3=(10.6)^3=60^3$. Dunque il cubo di 60 è contenuto in 248783, epperciò la radice cubica di 248783 non è inferiore a 60. Ne segue che la cifra delle decine della radice non è inferiore a 6. Abbiamo così provato che la cifra delle decine della radice cubica di 248783 è 6. Dunque:

Per trovare la cifra delle decine della radice, basta, nel numero dato, separare con un punto le migliaia dalle centinaia, ed estrarre la radice cubica intera del numero che si trova alla sinistra del punto.

2°. ***Ricerca delle unità della radice.*** Nell'eguaglianza (1), possiamo sostituire ad a il suo valore 6, ed otteniamo:

$$248783=6^3\,\text{migl.}+3.6^2.b\,\text{cent.}+3.6.b^2\,\text{dec.}+b^3+r, \quad \text{ossia}$$
$$248783=216\,\text{migl.}+108.b\,\text{cent.}+18.b^2\,\text{dec.}+b^3+r, \quad \text{ossia}$$
$$248783-216000=108.b\,\text{cent.}+18.b^2\,\text{dec.}+b^3+r, \quad \text{ossia}$$
$$32783=108.b\,\text{cent.}+18.b^2\,\text{dec.}+b^3+r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dall' eguaglianza precedente si scorge che l'addendo $108.b$ cent. è tutto contenuto nella somma 32783; e poichè $108.b$cent. è un numero esatto di centinaia, se esso deve essere contenuto in 32783, dovrà essere contenuto

* Per comodità dell'alunno poniamo qui i numeri interi da 1 a 9, e sotto i rispettivi cubi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.

nelle 327 cent. di 32783; sarà quindi $108.b$ cent. contenuto in 327 cent., ossia $108.b$ contenuto in 327.

Se fosse esattamente $108.b = 327$, dividendo 327 per 108 si otterrebbe per quoto il valore di b. Ma [come si scorge dalla (2)] nelle 327 cent. di 32783 vi possono essere centinaia provenienti dalla somma degli addendi $18.b^2$ dec., b^3, r. Ne segue che, dividendo 327 per 108, si ottiene per quoto il valore di b, oppure un numero maggiore di b.

Ciò che abbiamo fatto lo possiamo esprimere così:

Trovata la cifra delle decine della radice, la si eleva al cubo, ed il numero ottenuto si sottrae dal gruppo delle migliaia del numero dato. Alla destra del resto si scrive la cifra delle centinaia del numero dato, ed il numero che ne risulta si divide pel triplo del quadrato della cifra delle decine della radice. Il quoziente intero che si ottiene sarà la cifra delle unità della radice, oppure una cifra troppo grande.

Dividendo 327 per 108, si ottiene per quoziente intero 3; sarà perciò 3 eguale a b, oppure 3 maggiore di b.

Per verificare questo, si potrebbe (tenendo una via analoga a quella seguita nel § 94) porre nella (2) il 3 al posto di b; e se il 2° membro della (2) non risulta maggiore del 1° membro, ne segue che 3 è la cifra delle unità della radice: in caso contrario, la cifra 3 è troppo grande. La si diminuisce d'una unità, e si riprova; se occorre, si diminuisce ancora d'una unità e si riprova, continuando così, finchè il 2° membro della (2) non risulti maggiore del 1° membro. Quando ciò si verifica, l'ultima cifra provata, è la cifra cercata. Ma è più comodo procedere nel seguente modo:

Sappiamo già che la cifra delle decine della radice è 6. Per provare se la cifra delle unità è 3, facciamo il cubo di 63. Se questo cubo si può sottrarre dal numero dato, sarà 3 la cifra delle unità della radice; se non si può sottrarre, è segno che la cifra 3 è troppo grande.

Ora il cubo di 63 è 250047, e questo numero non si può sottrarre da 248783: dunque la cifra 3 è troppo grande. Proviamo la cifra 2.

Il cubo di 62 è 238328, e questo numero si può sottrarre da 248783, e dà per resto 10455: dunque 2 è la cifra delle unità della radice.

Ne segue che la radice cubica di 248783 è 62, e che il resto dell'estrazione della radice cubica intera di 248783 è 10455.

Ciò che abbiamo fatto ultimamente lo possiamo esprimere così:

Per verificare se il quoziente intero ottenuto è veramente la cifra delle unità della radice, si scrive questo quoziente a destra della cifra delle decine della radice, e si fa il cubo del numero che ne risulta. Se questo cubo si può sottrarre dal numero dato, il quoziente intero è la cifra cercata delle unità della radice. In caso contrario, si esperimentano successivamente le cifre inferiori, finchè si ottenga un cubo che si possa sottrarre. L'ultima cifra esperimentata è la cifra delle unità della radice, ed il resto di questa sottrazione sarà il resto dell'estrazione della radice.

L'operazione si può disporre come è indicato nel seguente esempio:

RADICANDO	248'783	62	**RADICE CUBICA INTERA.**
	216		
	327	$3.6^2 = 108$; $327:108 = 3$. *	
Radicando	248783	$63^3 = 250047$.	
Cubo di 62	238328		
RESTO dell'estrazione di radice	10455		

* Veramente, invece di $327:108 = 3$, si dovrebbe scrivere: «*Il quoziente intero di* 327:108 è 3» Abbiamo invece scritto brevemente $327:108 = 3$, per maggior semplicità.

3° CASO. RADICE CUBICA INTERA DI UN NUMERO INTERO AVENTE PIU' DI 6 CIFRE.

Si abbia p.e. da estrarre la radice cubica intera di 248 783 418 549.

Poichè il numero dato ha più di tre cifre, la sua radice cubica intera ha più d'una cifra, ossia è un numero avente unità e decine.

Sappiamo già che il cubo delle decine della radice è un numero di migliaia; e che estraendo la radice cubica intera dalle migliaia del numero dato, si ottengono le decine della radice. Siamo perciò condotti a separare con un punto le migliaia dalle centinaia di 248 783 418 549, ed a cercare la radice cubica intera di 248 783 418. Questa radice sarà il numero delle decine della radice cercata. Trovate le decine, troveremo poi le unità col metodo indicato nel 2° caso. Siamo così ridotti ad estrarre la radice cubica intera del numero 248 783 418, che ha tre cifre di meno del numero dato.

La radice cubica intera di 248 783 418 ha anch'essa unità e decine; e le decine si ottengono estraendo la radice cubica intera dalle migliaia di 248 783 418, ossia da 248 783. Siamo così ridotti a separare con un punto le migliaia dalle centinaia di 248 783 418, e ad estrarre la radice cubica intera del numero 248 783 che ha tre cifre di meno di 248 783 418.

Poichè 248 783 ha sei sole cifre, ne sappiamo estrarre la radice cubica intera.

La radice cubica intera di 248 783 sarà il numero delle decine della radice di 248 783 418. Trovate le decine della radice di 248 783 418, si troveranno poi (col metodo indicato nel 2° caso) le unità della radice di 248 783 418; e così sarà trovata la radice cubica intera di 248 783 418.

Questa radice sarà il numero delle decine della radice cubica intera 248 783 418 549; e trovate le decine, troveremo poi col metodo solito anche le unità della radice cubica di 248 783 418 549.

Quest'ultima radice sarà la radice cubica intera cercata.

Osservazione. Si capisce facilmente che qualunque sia il numero di cifre del numero dato, tenendo la via sopra indicata, si arriverà sempre ad un numero non avente più di sei cifre, la cui radice cubica intera si sa estrarre.

L'operazione si può disporre nel seguente modo:

RADICANDO	248'783'418'549	6289 **RADICE CUBICA INTERA**
	216	
	327	$3.6^2 = 108$; $327 : 108 = 3$. *
Numero formato coi 2 primi periodi	248783	$3.6^3 = 250047$.
Cubo di 62	238328	
	104554	$3.62^2 = 11532$; ** $104554 : 11532 = 9$. *
Numero formato coi 3 primi periodi	248783418	$629^3 = 248858189$.
Cubo di 628	247673152	
	11102665	$3.628^2 = 1183152$; *** $11102665 : 1183152 = 9$. *
Nnmero formato coi 4 primi periodi	248783418549	$6289^3 = 248739515569$.
Cubo di 6289.	248739515569	
RESTO dell'estrazione di radice	43902980	

* Si ricordi la nota * della pag. 72.

** Per trovare il valore di 3.62^2, si osservi che il valore di 62^2 fu già trovato quando si cercava il valore di 62^3.

*** Il valore si 628^2 fu già trovato quando di cercava il valore di 628^3.

105. Da quanto precede si ricava facilmente la seguente regola:

REGOLA PER ESTRARRE LA RADICE CUBICA INTERA DI UN NUMERO INTERO.

1º. Si scompone il numero dato in gruppi di tre cifre, partendo da destra. L'ultimo gruppo a sinistra può anche avere meno di tre cifre.

2º. Si estrae la radice cubica intera del 1º gruppo a sinistra, e si ottiene la 1ª cifra (a sinistra) della radice.

3º. Si fa il cubo di questa cifra, e lo si sottrae dal 1º gruppo (a sinistra) del numero dato.

4º. A destra del resto ottenuto si scrive la cifra delle centinaia del 2º gruppo.

5º. Si divide il numero che ne risulta pel triplo del quadrato della cifra già trovata alla radice. Il quoziente intero ottenuto sarà la 2ª cifra della radice, oppure una cifra troppo grande. La si verifica scrivendola a destra della cifra già trovata alla radice, e facendo il cubo del numero che ne risulta. Se questo cubo si può sottrarre dal numero formato dai due primi gruppi (a sinistra) del numero dato, la cifra trovata è buona. In caso contrario, si esperimentano successivamente le cifre inferiori, finchè si ottenga un cubo che si possa sottrarre. L'ultima cifra esperimentata sarà la seconda cifra della radice.

6º. A destra del resto si scrive la cifra delle centinaia del 3º gruppo.

7º. Si divide il numero che ne risulta pel triplo del quadrato del numero già trovato alla radice. Il quoziente intero ottenuto sarà la 3ª cifra della radice, oppure una cifra troppo grande. La si verifica scrivendola a destra del numero già trovato alla radice, e si fa il cubo del numero che ne risulta. Se questo cubo si può sottrarre dal numero formato dai tre primi gruppi (a sinistra) del numero dato, la cifra trovata è buona. In caso contrario, si esperimentano successivamente le cifre inferiori, finchè si ottenga un cubo che si possa sottrarre. L'ultima cifra esperimentata sarà la 3ª cifra della radice.

8º. Si continua così finchè si sia operato su tutti i gruppi che formano il numero dato. L'ultimo resto sarà il resto dell'estrazione della radice cubica intera.

Osservazione. All'estrazione della radice cubica intera dei numeri interi si applichino le osservazioni 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª del § 95, pag. 64.

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA DELLE FRAZIONI.

106. Facendo, per la radice cubica delle frazioni ragionamenti analoghi a quelli fatti per la radice quadrata delle frazioni, si ricavano immediatamente le seguenti regole

107. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI IL NUMERATORE ED IL DENOMINATORE SONO CUBI.

REGOLA. *La radice cubica d'una frazione ordinaria in cui il numeratore ed il denominatore sono cubi è una frazione ordinaria che ha per numeratore la radice cubica del numeratore, e per denominatore la radice cubica del denominatore della frazione data.*

108. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI IL SOLO DENOMINATORE È CUBO.

REGOLA. *La radice cubica (per difetto) d'una frazione ordinaria in cui il solo denominatore è cubo è una frazione ordinaria che ha per numeratore la*

radice cubica intera del numeratore, e per denominatore la radice cubica del denominatore della frazione data.

Osservazione. Si estendano alla radice cubica le osservazioni 1ª e 2ª del § 97.

109. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI NÈ IL NUMERATORE NÈ IL DENOMINATORE SONO CUBI.

REGOLA. *Per estrarre la radice cubica d'una frazione ordinaria in cui nè il numeratore nè il denominatore sono cubi, si moltiplicano ambi i termini della frazione pel quadrato del denominatore. La radice cubica della frazione così ottenuta sarà la radice cubica cercata.*

Osservazione. Si estendano alla radice cubica le osservazioni 1ª e 2ª del § 98.

110. FRAZIONE DECIMALE.

REGOLA. *Per estrarre la radice cubica da un numero decimale, si rende multiplo di 3 (se non lo è) il numero delle cifre decimali, collo scrivere uno o due zeri alla destra del numero dato. Poi si estrae la radice cubica intera del numero che ne risulta, senza tener conto della virgola decimale. Però, quando si comincia ad operare sul primo gruppo di cifre decimali, si pone la virgola decimale alla radice; e poi si continua l'operazione come se questa virgola decimale non esistesse.*

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA
CON UNA DATA APPROSSIMAZIONE.

111. TEOREMA. La radice cubica di un numero a intero o frazionario, approssimata per difetto a meno di $\frac{1}{n}$ (per n intero e positivo), è una frazione ordinaria che ha per denominatore n, e per numeratore la radice cubica intera del prodotto an^3.

Dimostrazione. Si fa una dimostrazione analoga a quella del teorema del § 100.

Osservazione. All' estrazione della radice cubica si applichino le osservazioni 1ª e 2ª del § 100.

112. Con ragionamento analogo a quello fatto nel § 101 si ricava la seguente regola:

REGOLA PER ESTRARRE DA UN NUMERO INTERO O FRAZIONARIO LA RADICE CUBICA A MENO DI $^1/_n$, ESSENDO n UNA POTENZA INTERA E POSITIVA DI 10.

1°. Si scrive il numero dato sotto forma di frazione decimale avente tante terne di cifre decimali quanti sono gli zeri di n; e se mancano cifre decimali, vi si supplisce con zeri.

2°. Si estrae la radice cubica del numero ottenuto, seguendo la regola del § 110.

PARTE SECONDA

Esercitazioni relative alla Parte Prima

Addizione.

Si trovi il valore di ciascuna delle seguenti somme:

1. $-12+24$. **2.** $-27+81$. **3.** $-149+163$. **4.** $-48+31$. **5.** $-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}$.

6. $-\frac{5}{12}+\frac{7}{24}$. **7.** $-\frac{5}{8}+\frac{11}{12}$. **8.** $-3\frac{4}{5}+7\frac{1}{9}$. **9.** $-3-1\frac{1}{5}$.

10. $-7-15$. **11.** $-21-1\frac{3}{8}$. **12.** $-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$. **13.** $-\frac{3}{4}-\frac{5}{9}$.

14. $-\frac{3}{7}+1\frac{2}{3}$. **15.** $-\frac{7}{12}+5\frac{1}{4}$. **16.** $-3\frac{1}{9}-7\frac{1}{10}$. **17.** $-17+13\frac{4}{9}$.

18. $-\frac{3}{8}+2\frac{3}{5}$. **19.** $-\frac{7}{10}-11\frac{2}{9}$.

Si trovi il valore di ciascuna delle seguenti somme: *

20. $5-8+5-7+5$. **21.** $12-27+31-49+53-24$.

22. $-7-11-13+10-41-534+459$. **23.** $^3/_4-{}^5/_6+{}^7/_8-{}^9/_{10}+{}^3/_5-{}^2/_3-{}^1/_2$.

24. $-3\frac{1}{4}+5\frac{3}{8}-1\frac{1}{6}-4\frac{1}{9}-3\frac{1}{2}+5\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{10}$.

25. $3+(-4)+(-8)+5+(-18)+(-20)$.

26. $\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-3\frac{1}{6}\right)+2\frac{1}{4}$.

Si eseguisca la somma dei seguenti numeri:

27. $+3,\ -4,\ -8,\ -5,\ -18,\ -20$.

28. $-2,\ -5,\ +6,\ -4,\ +5,\ -9,\ 11,\ -10$.

29. $-3,\ -{}^1/_2,\ +{}^1/_4,\ -{}^3/_8,\ +8,\ -2,\ +{}^1/_6,\ -3$.

30. $-\frac{3}{4},\ +\frac{1}{8},\ -\frac{1}{12},\ -3,\ +5\frac{1}{6},\ -2\frac{1}{2},\ +10,\ -\frac{11}{3}$.

---

* Per la legge associativa dell'addizione, si può anche fare prima la somma di tutti i termini positivi, poi la somma di tutti i termini negativi, e poi sommare insieme le due somme.

31. —1, +3, —5, +7, —9, +11, —13, +15.
32. +2, —4, +6, —8, +10, —12, +14, —16.

Si trovi il valore di ciascuna delle seguenti somme applicando il c lario 1° § 30:

33. (—3+4—7+22)+(—10+8—7+11—5—13)+(1—8+15—22+29).

34. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)+\left(-3\frac{1}{4}-\right.$

35. $\left(-3\frac{1}{8}-1\frac{1}{6}-1\frac{1}{10}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}-3\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}\right).$

36. Si trovi il valore delle somme dell'esercizio precedente senza far uso d corollario 1° § 30.
37. Si trovi il valore della somma 1—3+5—7+9—11+......... este fino a 500 termini. *
38. Si trovi il valore della somma 1—3+5—7+9—11+......... estes fino a 999 termini.
39. Si trovi il valore della somma 1—3+5—7+9—11+......... estes fino ad *n* termini.
40. Si trovi il valore della somma 2—4+6—8+10—12+........ estes fino a 600 termini.
41. Si trovi il valore della somma 2—4+6—8+10—12+........ estes fino a 583 termini.
42. Si trovi il valore della somma 2—4+6—8+10—12+........ estes fino ad *n* termini.

Sottrazione.

In ciascuna delle seguenti coppie di numeri, dal 1° numero si sottragga il 2°

43. +7, 8. **44.** 5, —7. **45.** —11, —10. **46.** 10, +24.

47. $7\frac{1}{2}$, $-\frac{223}{4}$. **48.** $-3\frac{1}{4}$, $-25\frac{1}{8}$. **49.** $5\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{8}$.

Si trovi il valore di ciascuna delle seguenti differenze, facendo uso de teorema 2° § 34:

50. (2—3+10—24+36—60+120—200)—(54+36—108+201).

51. $\left(1\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}-3\frac{1}{10}\right)-\left(-3\frac{7}{8}-2\frac{5}{6}+1\frac{1}{9}-5\frac{7}{20}\right).$

52. $(3/8-5/10+7/12)-(-2/3+4/5-6/7+8/9)$.

53. Si trovi il valore delle differenze dell'esercizio precedente senza far us del teorema 2° § 34.

Si tolgano le parentesi, e si trovi il valore delle seguenti espressioni:

54. $-3-\{-5+[4-(-3+2)]\}$.

55. $-8-\{-5-[-3-(-8-2)+(-4)]-(-10)\}$.

56. 15+6—[3—(8+4)]. **57.** 37—48—[18—(12+3)—(2—3)—33].

* Si scrivano per ordine il 1° addendo, poi la somma dei due primi, poi la somma dei tre primi, ecc.; e si vedrà subito la legge di formazione di queste somme.

58. $6-8-3-[4-8-(2-5)-(4+3)+(8+2)]$.

59. $44+[48-(6+3-7)+4]-[48-8+2+(4+3)]$.

60. $4-[(3-4)+(3+17)-(98+3)]$. **61.** $5+2-6-\{3-(6-6)\}$.

62. $7-\left[3-\left\{4-(5-2)\right\}\right]$. **63.** $3-\left[4+\frac{2}{3}-\left\{4+\frac{1}{3}-3-\left(\frac{3}{4}+2+3+5\right)\right\}\right]$.

64. $2-\left[3-\left\{4-(5-6)\right\}\right]$. **65.** $\frac{3}{2}-\left[7+\left\{3-2-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right\}+2-(4+3)\right]$.

66. $3-\left[5-\left\{2-(3-3)+2-(4-2-1)\right\}\right]$.

67. $\frac{1}{2}-\left\{\frac{1}{3}-5-\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\left(3-\frac{1}{3}\right)\right]\right\}$. **68.** $4+\left[\left(\frac{3}{4}-2\right)+\left(\frac{1}{2}-3\right)\right]+$
$+\left(3+\frac{2}{3}-2\right)-\left[-\left(\frac{1}{4}-3\right)\right]-\left\{2-\left[\frac{1}{2}-(2-3)-3\right]-2\right\}$.

69. $12-\left\{[25-(6-3+7)-4]-\left[24-8+2-\left(4+\frac{2}{3}\right)\right]\right\}$.

70. $\left(5-3-\frac{3}{4}\right)-\left\{4-5-(3-7-5)-[7-(3-2)]-2\right\}$.

71. $11-\left\{(5-3+2)-\left[6-3-\left(\frac{3}{4}-3\right)-7\right]-(2-5-3)\right\}$.

72. $\frac{3}{4}-\left[\frac{5}{6}+\frac{2}{9}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)$.

73. $\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{8}-1\right)-\left(3-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left\{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$

PROBLEMI SULL'ADDIZIONE E SULLA SOTTRAZIONE.

74. Se x è un numero intero, come si rappresenta il numero intero che immediatamente lo precede, e quello che immediatamente lo segue?

75. Se x rappresenta un numero, come si rappresenta il numero che gli è superiore di a, o gli è inferiore di b?

76. Se presentemente ho x anni, quanti anni avevo a anni or sono, e quanti ne avrò fra b anni?

77. Se x è un multiplo di 3, come si rappresenta il multiplo di 3 immediatamente precedente, e quello immediatamente seguente?

78. Da un giuoco di 32 carte se ne tolgono x e poi ancora 3 in una prima volta; e poi, in una seconda volta, se ne toglie il doppio di quanto se ne tolsero la prima volta, ed ancora 5 di più. Quante carte rimangono?

79. Il lato maggiore di un rettangolo, supera il minore di a metri. Quale è il perimetro del rettangolo se il minore è lungo x metri?

80. Ho fatto quattro compere. Nella prima ho speso lire m. Nella seconda a lire di più; nella terza b lire di più che nella seconda; e nella quarta c lire di più che nella terza. Quanto ho speso in tutto?

81. Un padre ha m anni; il figlio ne ha a di meno; e l'avolo b di più. Qual'è presentemente la somma delle tre età? Qual era n anni or sono? Quale sarà fra n anni?

Moltiplicazione ed elevazione a potenza.

PRODOTTO E POTENZA DEI MONOMI.

Esempio 1°. $(-x^n)^5$. La base $-x^n$ è negativa e l'esponente 5 è dispari; dunque sarà $(-x^n)^5 = -x^{5n}$.

Esempio 2°. $(-x)^{2n}$. Qualunque sia il valore del numero intero n, sappiamo che $2n$ rappresenta un numero pari. Avremo quindi: $(-x)^{2n} = +x^{2n}$.

Esempio 3°. $(-x)^{2n+1}$; $(-x)^{2n-1}$. Qualunque sia il valore del numero intero n, sappiamo che $2n+1$ e $2n-1$ sono numeri dispari. Avremo quindi: $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$; $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$. *

Si eseguiscano i seguenti prodotti:

82. $(-5)(+2)(+7)$. **83.** $(+4)(-1)(-{}^1/_3)(+{}^2/_5)$.

84. $4\frac{1}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-8\frac{1}{6}\right).\frac{5}{8}$. **85.** $8\frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-2\right)\left(+\frac{1}{3}\right)$.

86. $(a^3)^2$. **87.** $(a^n)^2$. **88.** $(a^n)^3$. **89.** $(a^3)^n$. **90.** $(a^2b^3)^n$. **91.** $(-a)^3$.

92. $(-a^n)^4$. **93.** $(-a^n)^5$. **94.** $(-a)^{2n}$. **95.** $(-a)^{2n+1}$. **96.** $[(-a^2)^4]^3$.

97. $y.y^{n-2}.y$. **98.** $a^x.a^{3x}.b^{4c}.a^{2x}.b^c$. **99.** $a^{m-n}.a^n.b^{2m-3n}.b^{4n-m}$.

100. $8c^2x^2 \times 4a^2c$. **101.** $5abcx(-7a^2cx^3)$. **102.** $(-18x^2y)(-12ay)$.

103. $(-ab)(+ab^2)(-a^2b)(-a^2b^2)$. **104.** $(4a^2x)(-5a^2x^2)(-x)$.

105. $(-xy)(ax)(-ay)(-5)$. **106.** $(-3x^2)(-4x^3)(-5x)(-1)$.

107. ${}^3/_4 a^2b.(-{}^2/_5 bc)$. **108.** $(-{}^1/_2 a^5mn)(-{}^2/_3 ab)(-{}^1/_5 bc).2am^3$.

109. $(-5a^2b)^3$. **110.** $({}^1/_3 m^4n^2)^2$. **111.** $(-{}^1/_2 bc)^3$. **112.** $(8bn^3p)^4$.

113. $(-2a^3)^4+(-2a^4)^3-(-3a^6)^2-(-5a^2)^6-(-8a^4)^3$.

114. $(5anx)^{2c}.(2an)^{c+2}.(2nx)^{c-2}$. **115.** $(ab)^{x-2c}.(ac)^{5x-6c}.(bc)^{9x-10c}$.

116. $[(35a^5)^m]^n.[(7a^3)^m]^n$.

PRODOTTO DI UN POLINOMIO E DI UN MONOMIO.

Esempio 1°. $3ab^2xy^2(2a^2x^3-3b^3x+2a^2y^2+5xy)=$

$=3ab^2xy^2.2a^2x^3-3ab^2xy^2.3b^3x+3ab^2xy^2.2a^2y^2+3ab^2xy^2.5xy=$

$=6a^3b^2x^4y^2-9ab^5x^2y^2+6a^3b^2xy^4+15ab^2x^2y^3$.

Esempio 2°. $\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)\left(-\frac{1}{4}a^2b+\frac{3}{5}ab^2-4ab\right)=$

$$=\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)\left(-\frac{1}{4}a^2b\right)+\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)\left(\frac{3}{5}ab^2\right)+\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)\left(-4ab\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}.\frac{1}{4}\right)a^4b^4-\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{5}\right)a^3b^5+\left(\frac{2}{3}.4\right)a^3b^4=\frac{1}{6}a^4b^4-\frac{2}{5}a^3b^5+\frac{8}{3}a^3b^4.$$

Esempio 3°. $(3x^3+7x^2-2x+4).2a^2x=$

$=3x^3.2a^2x+7x^2.2a^2x-2x.2a^2x+4.2a^2x=6a^2x^4+14a^2x^3-4a^2x^2+8a^2x$.

Esempio 4°. $\left(-2a^4x^3y^2+\frac{1}{3}a^2x^3y^3-\frac{3}{4}a\right)\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)=$

$$=(-2a^4x^3y^2)\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)+\left(\frac{1}{3}a^2x^3y^3\right)\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)+\left(-\frac{3}{4}a\right)\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)=$$

---

* Quando gli esponenti sono letterali, si applicano le regole esattamente come se gli esponenti fossero numeri scritti nel sistema decimale.

$$=\left(2.\frac{3}{5}\right)a^5x^5y^2-\left(\frac{1}{3}.\frac{3}{5}\right)a^3x^5y^3+\left(\frac{3}{4}.\frac{3}{5}\right)a^2x^2=$$

$$=\frac{6}{5}a^5x^5y^2-\frac{1}{5}a^3x^5y^3+\frac{9}{20}a^2x^2.$$

Si eseguiscano le seguenti operazioni:

117. $(-8abc^2)(14a^2b-3a^2c-2b^2c+4b^2c^2)$.

118. $3abcd(4a^2bc-3ab^2d+7bc^2d-8bcd^2)$.

119. $(-4a^2bx^2y)(11a^2x^3-4b^3x+5a^2y^3-3b^3y)$.

120. $(-9a^2xy)(-6a^2x^2y+4ax^2y^2-7a^2xy^2)$.

121. $\frac{4}{5}a^3bc\left(\frac{3}{5}a^3b^2-\frac{7}{4}a^6b^3-\frac{2}{3}a^2b\right)$.

122. $-a+b-c$ si moltiplichi per a.

123. $a+3b-4c$ si moltiplichi per $-2a$.

124. a^3+3a^2+4a si moltiplichi per $-1/_2a$.

125. $3a^3-5a^2-6a+7$ si moltiplichi per $-3a^2$.

RIDUZIONE DEI TERMINI SIMILI.

Si faccia la riduzione dei termini simili nei seguenti polinomi: *

126. $a^3b^5-2a^2b^6+2ab^7-3a^3b^5+4a^2b^6-b^8$.

127. $-3ab^7+5a^2b^6-4b^8-7a^4b^4-3ab^7+2b^8$.

128. $-5a^4b^4-3a^2b^6+4ab^7+11a^4b^4$. **129.** $4a-5b+2c-a+3a-7b+2c+a$.

130. $8a^2b-5ab^2-4a^2b-ab^2+c$. **131.** $a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab+a^2-b^2$.

132. $4a^3+2a^2b-3ab^2-4a^3+6a^2b+2ab^2+a^3-7a^2b+6ab^2$.

133. $a^2-\frac{ab}{4}+b^2-\frac{a^2}{4}+ab+b^2-a^2+ab-\frac{b^2}{4}$. **

134. $\frac{3}{4}a^2+a^2b^2+\frac{4}{5}a^2-3a^2b^2-\frac{a^2}{10}+7a^2b^2$.

135. $6a^2-4a+3b-4+12a^2-3a+b-1$.

136. $3/_4a^2b^3c^4-4/_5a^3b^2c-4/_3a^2b^3c^4+2/_5a^3b^2c+2/_5a^3b^2c$.

Dovendo sommare o sottrarre o moltiplicare frà loro i polinomi, è utile far prima in ciascuno di essi la riduzione dei termini simili. Poi è spesso utile dare all'operazione una disposizione simile a quella che si dà in Aritmetica, come si vede nei seguenti esempi.

---

* Conviene abituarsi a far sempre in ogni polinomio la riduzione dei termini simili. Ciò facilita e semplifica molto i calcoli che poi si hanno da eseguire sui polinomi stessi. È pure bene abituarsi a fare questa riduzione *a memoria* scrivendone direttamente il risultato. Ciò riesce più facile se, fissato il 1º termine, si scorrono coll'occhio tutti gli altri, sottolineando i termini simili a quello considerato, e facendone contemporaneamente la riduzione. Poi si fa il medesimo col 1º termine che non è stato sottolineato, e così di seguito finchè siano sottolineati tutti i termini. Sottolineando similmente i termini simili, e diversamente i termini non simili, si potrà con facilità evitare le omissioni, e verificare, quando occorra, l'esattezza del risultato.

** È la stessa cosa scrivere p.e. $\frac{a}{4}$ oppure $\frac{1}{4}a$; così pure scrivere $\frac{3}{4}a^2b$ oppure $\frac{3a^2b}{4}$; scrivere $\frac{14}{3}a^2b$, oppure $\frac{14a^2b}{3}$, oppure $4\frac{2}{3}a^2b$. Giova ricordare che, per convenzione, è p.e. $4\,^1/_3=4+^1/_3$; e che $4\,^1/_3$ si considera come un numero solo, e non come la somma indicata d due numeri. Perciò sarà p.e. $4+^1/_3a^2b=(4^1/_3)a^2b=(4+^1/_3)a^2b$, e non eguale a $4+(^1/_3a^2b)$. Analogamente per gli altri casi.

Esempio 1º.

Si sommino i polinomi: $5a^3b^2-8a^2b+6b^2-5$; $-3a^3b^2-2a^2b+7$ $2a^2b-6a^3b^2+1$. In ciascuno di essi non vi sono termini simili da ri
Scriveremo i polinomi in modo che i termini simili siano in colonna.

	$5a^3b^2-8a^2b+6b^2-5$
	$-3a^3b^2-2a^2b-b^2+7$
	$-6a^3b^2+2a^2b\quad+1$
Somma *(colla riduzione eseguita dei termini simili)*	$-4a^3b^2-8a^2b+5b^2+3.$

Esempio 2º.

Da $4xy^2-5xy+2y^2-1$ *si sottragga* $3xy+5-7xy^2+y^2$. Scrive
i termini del sottraendo, col segno cambiato, in colonna coi termini s
del minuendo; poi rimarrà a fare solamente la riduzione dei termini simil

Minuendo	$+4xy^2-5xy+2y^2-1$
Sottraendo coi segni cambiati	$+7xy^2-3xy-y^2-5$
Resto *(colla riduzione eseguita dei termini simili)*	$+11xy^2-8xy+y^2-6.$

Esempio 3º.

Moltiplicando		$2a^3-3a^2b+5ab^2-2b^3$	
Moltiplicatore		$3a^2+2ab-b^2$	
Prod. del molt.do per	$3a^2$	$6a^5-9a^4b+15a^3b^2-6a^2b^3$	Prodotto p
» » »	$+2ab$	$+4a^4b-6a^3b^2+10a^2b^3-4ab^4$	della ridu
» » »	$-b^2$	$-2a^3b^2+3a^2b^3-5ab^4+2b^5$	dei termini si
Prodotto totale ridotto		$6a^5-5a^4b+7a^3b^2+7a^2b^3-9ab^4+2b^5.$	

Esempio 4º.

Moltiplicando		$2a^3x+3a^2x^2-2x^4$
Moltiplicatore		$5a^3x-2ax^3+3x^4$
Prod. del molt.do per	$5a^3x$	$10a^6x^2+15a^5x^3\quad-10a^3x^5$
» »	$-2ax^3$	$-4a^4x^4-6a^3x^5\quad+4ax^7$
» »	$+3x^4$	$+6a^3x^5+9a^2x^6\quad-6$
Prodotto totale ridotto		$10a^6x^2+15a^5x^3-4a^4x^4-10a^3x^5+9a^2x^6+4ax^7-6$

Esempio 5º.

Moltiplicando		$x^4y+x^3y^2-xy^4-y^5$
Moltiplicatore		$x^3y-x^2y^2+xy^3$
Prodotto del molt.do per	x^3y	$x^7y^2+x^6y^3\quad-x^4y^5-x^3y^6$
» »	$-x^2y^2$	$-x^6y^3-x^5y^4\quad+x^3y^6+x^2y^7$
» »	$+xy^3$	$+x^5y^4+x^4y^5\quad-x^2y^7-xy^8$
Prodotto totale ridotto		$x^7y^2\quad-xy^8.$

---

* Se i termini simili dei prodotti parziali si scrivono in colonna, resta facilitata la rid
dei termini simili del prodotto.

Adottando la disposizione indicata, si eseguiscano le seguenti operazioni:

137. $(5ax-3by+4cz)+(-2ax+4by-3cz)+(-ax+7by-cz)+(9ax-11by)$.

138. $(5x^3-2x+y-15+y^2)+(3x^3+4y-y^2+xy-x^2)+(4x^3-3xy)+(1-2xy)$

139. $(x^3+2x^2y-4xy^2+5y^3)+(7x^3-12x^2y+15xy^2-13y^3)+$
$+(-4x^3+5x^2y-7xy^2+9y^3)+(-2x^3+11x^2y-12xy^2+3y^3)$.

140. $(12a^5b^3-5a^4b^2-8a^3b^4)+(-7a^5b^3+8a^4b^2+5a^3b^4)+(-15a^5b^3+12a^4b^2)$.

141. $(7a^2-4abx+2b^2x^2)+(6a^2+3abx-4b^2x^2)+(-8a^2-7abx+3b^2x^2)$.

142. $(a^3-{}^3/_4a^2x+{}^1/_3ax^2-{}^5/_8x^3)+(a^3+{}^1/_2a^2x+{}^1/_4ax^2+{}^2/_3x^3)$.

143. $(x^2-11x+7)+(5x^2+x-9)+(4x^2+3x+5)+(-4x^2+3x+9)$.

144. Da $5a-3b+4c-d$ si sottragga $3a-7b+2c+7d$.

145. » $3a^2-2ab+b^2-3c^2$ » $a^2-5ab+3b^2-2c^2$.

146. » $4m^2-6mn+n^2+7$ » $2m^2+4mn+6n^2+4$.

147. » $7x^3+2x^2-5x+4$ » $5x^3+6x^2-2x-6$.

148. » $5x^2-10xy+5y^2-7$ » $4x^2-8xy+4y^2-9$.

149. » $3x^2y-3xy^2+y^3+3d$ » $x^2y+2xy^2+3y^3+4d$.

150. » ${}^3/_4a^3b^2+{}^5/_6a^2b+8{}^1/_2ab$ » ${}^2/_3a^2b-{}^5/_6a^3b^2+{}^4/_9ab$.

151. » ${}^1/_2a^2x+{}^1/_4ax^2+{}^2/_3x^3$ » $-{}^3/_4a^2x+{}^1/_3ax^2-{}^5/_8x^3$.

152. Dal 1° dei quattro polinomi seguenti si tolga la somma degli altri tre. *

$5a^2-3ab+b^2-3ac+2bc-2c^2$ $2a^2+5ab-3b^2+2ac-4bc+3c^2$

$4a^2-7ab+5b^2-4ac-5bc+c^2$ $2a^2+9ab-8b^2+3ac+3bc+2c^2$.

153. Dalla somma dei due primi polinomi dell'esercizio precedente si tolga la somma degli altri due.

154. Dalla somma del 1° e del 3° dei quattro polinomi dell'esercizio 152 si tolga la somma degli altri due.

155. $(a^3b^3-a^2b^4+ab^5)(a^2b^2+ab^3)$. **156.** $(a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5)(a^5b^2-a^7)$.

157. $(2a^3b^2-6a^2b^3+6ab^4-2b^5)(3a^2b^2-6ab^3+3b^4)$.

158. $(2x^3y+2x^2y^2+2xy^3)(x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4)$.

159. $(5a^4b^3-15a^3b^4+15a^2b^5-5ab^6)(4a^3b+12a^2b^2+12ab^3+4b^4)$.

160. $(a+x)(a+2x)(a+3x)(a+4x)$. **

161. $(2a+x)(3a+2x)(4a+3x)(5a+4x)$. **162.** $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$. ***

163. $(a^m+b^n)(a^n-b^m)$. **164.** $(a^m+b^p-2c^n)(2a^m-3b)$.

PRODOTTI NOTEVOLI.

Facendo uso dei teor. sui prodotti notevoli, si eseguiscano le operazioni:

165. $(3a-2b^2c)(3a+2b^2c)$. **166.** $(4a^2n-3abn^2)^2$. **167.** $({}^1/_3ab^2+2a^3bc)^2$.

168. $\left(\frac{4}{5}ab-xy\right)^2$. **169.** $(b-8ab^2cd)^2$. **170.** $\left(1+\frac{1}{3}a^3nx^2\right)^2$.

171. $(2a-3bc)^3$. **172.** $(2ab+4bc^2)^3$. **173.** $(3m-2m^3n^4)^3$.

174. $\left(a+\frac{1}{2}xy^2\right)^3$. **175.** $\left(1+\frac{1}{3}a\right)^3$. **176.** $\left(\frac{3}{4}b^2c-\frac{1}{2}m^2x\right)^3$.

---

* Basta cambiare il segno a tutti i termini dei polinomi sottraendi.

** Si moltiplica il 1° polinomio per il 2°; il prodotto ottenuto per il 3°; e così di seguito.

*** Si applica la regola esattamente come se gli esponenti fossero numeri scritti nel sistema decimale.

Si semplifichino le seguenti espressioni: *

177. $(ab-b^2)^2(a^2-ab)^2-(a-b)^4$. **

178. $(a-b)^3+(a-c)^3+(b-c)^3-3(a-b)(a-c)(b-c)$.

179. $(a^2b-ab^2)^3-(ab^2-b^3)^3+(b^3-a^3)^3$.

180. $(3ab-2b^2)^3+(2b^2-3a^2)^3+(3a^2-2ab)^3$.

181. $(x-{}^1/_2)^2(x+1)-(x+{}^1/_2)(x-1)^2+(x+2)^3$.

182. $(2x-1)^3-6(2x-1)^2x+12(2x-1)x^2-24x^3$.

Si verifichino le seguenti eguaglianze: ***

183. $(a-b)(b-c)(c-a)=bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$.

184. $(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2=(2a)^2$.

185. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

186. $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a-b)^2(a+b)+3(a+b)^2(a-b)=(2a)^3$.

187. $(x^2+py^2)(z^2+pu^2)=(xz+pyu)^2+p(yz-xu)^2$.

188. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$.

189. $x^2+2(x-1)(y-1)+y^2=(x+y-2)^2+2(x+y-1)$.

190. $a^2-2(a-1)^2+(a-2)^2=2$.

191. $a^2-3(a-1)^3+3(a-2)^3-(a-3)^3=6$.

Divisione.

DIVISIONE DEI MONOMI.

Si eseguiscano le seguenti divisioni:

192. $4x^2y^3:2xy^2$. 193. $6x^3y^2z:3xy^2$. 194. $x^3y^2z:xyz$.

195. $5x^4y^3:(-x^2y)$. 196. $(-8x^5yz^4):4x^4y$. 197. $12x:(-4)$.

198. $(-21x^2y^3z):(-3xy^3)$. 199. ${}^2/_3a^2m^3n:(-{}^1/_3amn)$.

200. $-{}^4/_5a^3bc^2:(-{}^2/_5abc)$.

MASSIMO COMUN DIVISORE E MINIMO COMUN MULTIPLO DEI MONOMI.

Si trovi il *M.C.D.* ed il *m.c.m.* di ciascuno dei seguenti gruppi di monomi:

201. $7a^3b^4c^2d$, $11a^4b^3cd^2$, $3a^3b^4d^2e$, $9a^5b^2c^3e^2$.

202. $4a^4b^4c^4$, $3a^6b^5c^4d^3$, $2a^4b^5c^6d^7$. 203. $16x^4y^3z^2$, $24x^4y^6z^3$, $32x^2y^2z^5$.

204. $30x^7y^2z^4$, $45x^6y^4z^3$, $60x^5y^5z^5$, $90x^4y^6z^7$.

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO.

Si eseguiscano le seguenti divisioni:

205. $(x^2+xy):x$. 206. $(4xy^2-6x^2y):2xy$.

207. $(16a^2b^3x-8a^3cx^2-16axy^3+24a^2x^2y^2):2ax$.

208. $(4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7):4ax$.

209. $(60x^3y^3z^2-48x^2y^4z^2+36x^2y^2z^4):4xyz^2$.

---

* *Semplificare un'espressione* significa eseguire tutte le operazioni indicate e fare tutte le possibili riduzioni di termini simili.

** Si osservi che si ha $(a-b)^4=(a-b)^3(a-b)$.

*** Per verificare un'eguaglianza, basta eseguire tutte le operazioni indicate, e tutte le possibili riduzioni su ciascuno dei due membri dell'eguaglianza. Se l'eguaglianza è vera, le due espressioni che così si ottengono devono essere identiche.

210. $(15a^4b-12a^3b^2-9a^3b^3+6a^4b^2):3ab$.

211. $(8a^4b^2-6a^3b^3+4a^2b^4-2a^2b^2):(-2a^2b^2)$.

212. $(-112xy^3+24x^2y^2-8x^3y):(-4xy)$.

213. $\left(\frac{1}{2}a^3b^2-\frac{1}{3}a^2b^3+\frac{1}{4}ab^4\right):\frac{3}{4}ab^2$.

214. $(x^{m+2}y^n+2x^{m+1}y^{n+1}+x^my^{n+2}):x^my^n$. *

SUL METTERE IN EVIDENZA UN FATTORE.

215. In $65a^2bc+70ab^2c-75abc^2$ si metta in evidenza il fattore $5ab$.

216. In $-60a^2bx^2y+56ab^2xy^2-52ab^2x^2y$ si metta in evidenza il fatt. $2xy$.

217. In $-44a^4bx^5y+16a^2b^4x^3y-20a^4bx^2y^4$ » » $-a^2x^2$.

218. In $54a^4x^3y^2-36a^2x^3y^3+63a^4x^2y^3$ » » $-9axy$.

219. In $15a^2b^3c-9a^2b+6abc$ » » $3ab$.

220. In $2m^3n^4p+5mnp^2-7m^3n^2p^4$ » » $-mnp$.

In ciascuno dei seguenti polinomi si metta in evidenza il *M.C.D.* dei termini dei polinomi:

221. $25a^2+30a^4-35a^6$. **222.** $12x^2y-18xy^2+24xy$.

223. $24a^2b^3c^5d^6-6a^4b^2c^7d^9-36a^3b^2c^9d^{11}-6a^2b^2c^2d^2$.

224. $21m^3n^2p^2-15m^2n^3p^2+9m^2n^2p^3-m^2n^2p^2$.

225. $84x^5y^4-108x^4y^5+420x^6y^3-228x^7y^6$.

226. $15a^2x^2-30a^2x^3+105a^2x^4-75a^2x^5$.

227. $-44ax^n+286a^2x^{n+1}-66a^3x^{n+2}$. **228.** $x^{m+n}y^m-x^{2n}y^{m+n}-x^ny^{2m}$.

Si mette talora in evidenza un monomio il quale non divide tutti i termini del polinomio. In questi casi, si introducono monomi che non sono interi.

Esempio 1°. Nel polinomio $15a^2bc-12ab^2c^4+7abc-20a^2b^3c$ *si metta in evidenza il fattore* $3ab^2c$.

Si avrà: $$3ab^2c\left(\frac{15a^2bc}{3ab^2c}-\frac{12ab^2c^4}{3ab^2c}+\frac{7abc}{3ab^2c}-\frac{20a^2b^3c}{3ab^2c}\right)=$$
$$=3ab^2c\left(\frac{5a}{b}-4c^3+\frac{7}{3b}-\frac{20}{3}ab\right).$$

Esempio 2°. Nel polinomio $17x^4y^3z^2-12xy^2z^3-10x^2yz^2$ *si metta in evidenza il fattore* $-4xyz^2$.

Si avrà: $$-4xyz^2\left(-\frac{17x^4y^3z^2}{4xyz^2}+\frac{12xy^2z^3}{4xyz^2}+\frac{10x^2yz^2}{4xyz^2}\right)=$$
$$=-4xyz^2\left(-\frac{17}{4}x^3y^2+3yz+\frac{5}{2}x\right).$$

229. In $a^3x^3y-3a^2bx^2y+3ab^2xy^2-b^3xy^3$ si metta in evidenza $-abxy$.

230. In $60a^3b^3c^2-48a^2b^4c^2+36a^2b^2c^4-20abc^6$ si metta in evidenza $4a^2b^2c^2$.

231. In $2a^2b^2-3ab^3+4a^3b-b^4$ si metta in evidenza $-3ab^3$.

232. In $-3x^4y+5x^3y^2-6x^2y^3-xy^4+4y^5$ si metta in evidenza $-2x^2y^3$.

233. In $4m^5n^2+{}^2/_9m^4n^5-{}^6/_7m^3n^6$ si metta in evidenza ${}^2/_3m^3n^4$.

---

* Si opera sugli esponenti letterali, come se fossero numeri scritti nel sistema decimale.

Equazioni

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UN'INCOGNITA.

Dovendo, per la risoluzione delle equazioni, far uso delle proprietà fondamentali delle equazioni (§§ 78, 79, 80), sarà bene che i principianti ricordino le seguenti avvertenze:

1ª. Per aumentare o diminuire un polinomio di un numero, basta aumentare o diminuire di questo numero un solo dei suoi termini.

2ª. Per moltiplicare o dividere un polinomio per un numero, bisogna moltiplicare o dividere per questo numero ciascun termine del polinomio.

3ª. Il tratto orizzontale che separa il numeratore d'una frazione (osservaz. § 59) dal denominatore, tiene anche le veci d'una parentesi. Perciò, se il numeratore è un polinomio, nell'atto in cui si sopprime il denominatore, bisogna sostituire il tratto orizzontale con una parentesi; ossia bisogna chiudere il primitivo numeratore in parentesi. Dopo ciò si toglierà la parentesi, eseguendo le operazioni indicate, ed avendo l'avvertenza di cambiare il segno a tutti i termini del numeratore se la frazione era preceduta dal segno —.

Esempio 1º. *Si risolva l'equazione:* $\frac{7x+2}{4}-\frac{7}{2}=\frac{3x}{8}+5.$

Moltiplicandone tutti i termini per 4.2.8, che è il prodotto dei denominatori, ed eseguendo le operazioni indicate, si ha successivamente:

$$\frac{7x+2}{4}.4.2.8-\frac{7}{2}.4.2.8=\frac{3x}{8}.4.2.8+5.4.2.8, \quad \text{ossia}$$

$$(7x+2).2.8-7.4.8=3x.4.2+5.4.2.8, \quad \text{ossia} \quad 112x+32-224=24x+320.$$

E trasportando i termini incogniti nel 1º membro, e termini noti nel 2º, e facendo poi la riduzione dei termini simili, si ha successivamente:

$$112x-24x=320-32+224, \quad \text{ossia} \quad 88x=512.$$

Osservando ora che 88 e 512 sono divisibili per 8, possiamo ancora dividere ambi i membri per 8, ed otterremo: $11x=64$. Dividendone ambi i membri per 11, otteniamo l'equazione $x=\frac{64}{11}$, ossia $x=5\frac{9}{11}$, che è equivalente alla proposta, e ci dà immediatamente il valore di x.

Risposta. L'equazione ha per radice $x=5\ {}^{9}/_{11}$.

Osservazione 1ª. Invece di moltiplicare tutti i termini dell'equazione data pel prodotto 4.2.8 dei denominatori, avremmo fatto meglio se avessimo moltiplicato tutti i termini per 8 che è il m.c.m dei denominatori. Avremmo in questo caso ottenuto successivamente $\frac{7x+2}{4}.8-\frac{7}{2}.8=\frac{3x}{8}.8+5.8,$ ossia $(7x+2).2-7.4=3x+5.8$, ossia $14x+4-28=3x+40$, ossia $14x-24=$ $=3x+40$; e quindi $14x-3x=40+24$, ossia $11x=64$; da cui $x=5\ {}^{9}/_{11}$.

Osservazione 2ª. Dall'esempio precedente si vede che, per far scomparire il denominatore di ciascuna frazione, si divide il multiplo comune ai denominatori pei singoli denominatori, ed i quoti così ottenuti si moltiplicano pei corrispondenti numeratori. Conviene abituarsi a fare queste operazioni

a memoria; e questo si ottiene facilmente se il multiplo comune ai denominatori lo si scrive scomposto in fattori, come abbiam fatto noi scrivendo p.e. 4.2.8 invece di 64. Basterà allora immaginare soppressi quei fattori il cui prodotto forma il denominatore d'una frazione, e moltiplicare il numeratore corrispondente pel prodotto dei rimanenti fattori.

Bisognerà ancora ricordare che i termini interi dell'equazione resteranno moltiplicati per l'intero multiplo comune dei denominatori.

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $\frac{3x+1}{2}+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-x\right)-\frac{1}{2}x\right]\frac{1}{2}=1.$

Cominciamo a togliere le parentesi, principiando dalle parentesi più interne, ed avremo successivamente:

$$\frac{3x+1}{2}+\left[\frac{1}{12}-\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right]\frac{1}{2}=1, \quad \text{ossia} \quad \frac{3x+1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{x}{6}-\frac{x}{4}=1.$$

E moltiplicando tutti i termini per 24, si ottiene:

$$(3x+1)12+1-4x-6x=24, \quad \text{ossia} \quad 36x+12+1-4x-6x=24.$$

E trasportando tutti i termini noti nel 2° membro, si ha:

$$36x-4x-6x=24-12-1, \quad \text{ossia} \quad 26x=11.$$

E dividendo ambi i membri per 26, si ha: $x={}^{11}/_{26}$. Questa equazione è equivalente all'equazione data, e ci dà immediatamente il valore di x.

Risposta. L'equazione ha per radice $x={}^{11}/_{26}$.

Esempio 3°. *Si risolva l'equazione:* $\frac{x}{a-2}+\frac{x+2}{a+2}=2x-\frac{2a^2x}{a^2-4}$ . . . (1)

Il m.c.m. dei denominatori è a^2-4, ossia $(a+2)(a-2)$. Esso non contiene incognite; e, se è diverso da zero, moltiplicando tutti i termini dell'equazione per $(a+2)(a-2)$, otterremo (teor. 2°, § 79) un'equazione intera, ed equivalente all'equazione data.

Ora $(a+2)(a-2)$ è diverso da zero se sono contemporaneamente diversi da zero $a+2$ ed $a-2$. Ora $a+2$ è diverso da zero se a è diverso da -2; ed $a-2$ è diverso da zero se a è diverso da $+2$. Dunque $(a+2)(a-2)$, è diverso da zero se a è diverso da ± 2.

In tale ipotesi, potremo moltiplicare tutti i termini della (1) per $(a+2)(a-2)$, ed otterremo l'equazione equivalente:

$$x(a+2)+(x+2)(a-2)=2x(a^2-4)-2a^2x, \quad \text{ossia}$$
$$ax+2x+ax+2a-2x-4=2a^2x-8x-2a^2x.$$

Trasportando i termini incogniti nel 1° membro, ed i termini noti nel 2°, e facendo poi la riduzione dei termini simili, otterremo:

$$ax+2x+ax-2x-2a^2x+8x+2a^2x=4-2a, \quad \text{ossia} \quad 2ax+8x=4-2a.$$

E dividendo tutti i termini per 2, si avrà:

$$ax+4x=2-a, \quad \text{ossia} \quad (a+4)x=2-a.$$

Se $a+4$ è diverso da zero, ossia se a è diverso da -4, potremo dividere ambi i membri pel coefficiente dell'incognita, ed avremo l'equazione $x=\frac{2-a}{a+4}$, che è equivalente alla proposta, e ci dà immediatamente il valore di x.

Osservazione. Bisogna però ricordare che, secondo le ipotesi fatte, a può avere qualsiasi valore, tranne i valori $a=\pm 2$ ed $a=-4$.

Risposta. Se a è diverso da ± 2 *e da* -4, *sarà* $x=\frac{2-a}{a+4}$.

Si risolvano le seguenti equazioni:

234. $5x+50=4x+56$. **235.** $16x-11=7x+70$. **236.** $3x+10=5x-70$.

237. $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x-3}{4}+2+\frac{2}{3}=0$. **238.** $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{13}$.

239. $\frac{2}{7}x+15-\frac{3}{5}x+29=0$. **240.** $\frac{1}{7}(3x-4)+\frac{1}{3}(5x+3)=43-5x$.

241. $\frac{1}{2}(27-x)=\frac{9}{2}+\frac{1}{10}(7x-54)$.

242. $\frac{1}{6}(8-x)+x-1\frac{2}{3}=\frac{1}{2}(x+6)-\frac{x}{3}$.

243. $\frac{3x+1}{13}+\frac{2x-5}{3}=\frac{4x-1}{5}+\frac{2-x}{2}$. **244.** $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{4+x}{4}$.

245. $\frac{4x-8}{10}-\frac{20-x}{4}+\frac{x+\frac{1}{2}}{3}=6\frac{1}{6}$. *

246. $\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$.

247. $\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{6}\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=4\frac{8}{9}$.

248. $\frac{5x}{3}+2x+6\left(x-\frac{x}{3}-\frac{4x}{9}\right)=450000$.

249. $21-\frac{2}{5}(3x+4)-\frac{5}{6}(7x-1)=8+\frac{9}{10}(3x-1)-\frac{5}{3}(5x-2)$.

250. $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)=2(x-2)(x-3)$.

251. $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)=9\frac{3}{4}$.

252. $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4}-\frac{14-2x}{5}\right)=\frac{x-9}{2}-\frac{7}{8}$.

253. $\left[\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{3}\right]-\left[x-\frac{1}{3}(2x-1)\right]=0$.

254. $\frac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\frac{7x}{2}-5\right)\right]+13(x-5)+\frac{1}{4}=0$.

255. $2\frac{7}{8}-\left[3\frac{7}{8}-\left(4\frac{1}{4}-4\frac{3}{8}x\right)\right]=6\frac{7}{8}-\left(7\frac{5}{8}-3\frac{5}{8}x\right)$.

256. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x-1\right]-1\right)-1\right]-1\right\}-1=0$.

257. $\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}[x+2]+4\right)+6\right]+8\right\}=1$.

258. $4x+\frac{1}{2}(x-2)-2\left[2x-\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{18}\left\{16-\frac{1}{2}(x+4)\right\}\right)\right]=\frac{2}{3}(x+2)$.

259. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$. **260.** $\frac{x+a}{a}-\frac{x+b}{b}=1$.

---

* Quando nell'equazione vi è qualche frazione con termini frazionari, si cominci a ridurre separatamente questa frazione in un'altra frazione equivalente che abbia i termini interi.

261. $a(x-b)=b(a-x)-(a+b)x.$ **262.** $\frac{2x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}.$

263. $\frac{3a+bx}{3a-bx}=\frac{7a+3b-2bc}{7a-3b-2bc}.$ **264.** $\frac{9a-11x}{3a-2c}=\frac{9a+11x}{3a+2c}.$

265. $2x+m-n=\frac{p+q}{p-q}(m+n).$

266. $\frac{2}{3}[a-(b-x)]-\frac{3}{4}[x-(b-a)]-\frac{4}{5}[b-(a+x)]=\frac{5}{6}[x+a-b].$

267. $2a^2b-(a-b)x=2b(b^2+2a^2)-(a+b)x.$

268. $(a+b-c)x-(a-b-c)x-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)-(a-b+c)x.$

269. $\frac{a(x-a)}{b+c}+\frac{b(x-b)}{c+a}+\frac{c(x-c)}{a+b}=x.$

270. $\frac{x-b^2+2ac}{a+c}-\frac{x-a^2+2bc}{b+c}=\frac{x-c^2-2ab}{a-b}.$

271. $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}-1=abc-x(a+b+c).$

272. $3x-\left(\frac{x}{3}+\frac{5a}{6}\right)=\frac{2a}{5}-\frac{a}{3}-\left(\frac{a}{2}-\frac{5x}{3}\right).$

273. $x-\frac{a}{5}-\left(2x-\frac{a}{10}\right)=3x-\frac{a}{4}+4x-\frac{37a}{20}.$

274. $\frac{x}{ab}-\frac{x}{3b}+\frac{x}{3a}-2=3ab-x(a+b-3).$

275. $\frac{1-x}{1-a}-\frac{1-x}{1-a^2}+\frac{1-x}{1-a+a^2-a^3}-2=2-\frac{1-x}{1+a}-\frac{1-x}{1+a^2}-\frac{1-x}{1+a+a^2+a^3}.$

RISOLUZIONE ALGEBRICA DEI PROBLEMI DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

Per facilitare la risoluzione dei problemi di 1° grado ad una incognita, possono giovare le seguenti norme pratiche:

1°. Si rappresenti con una lettera, p.e. con x, l'incognita del problema; e, supponendo di conoscerne già il vero valore, si indichino le operazioni che si farebbero sull'incognita e sui dati del problema se si volesse verificare se i valori dell'incognita soddisfano o non al problema. Alcune volte, così facendo, si ottengono due espressioni che il problema dice essere eguali fra loro; oppure si ottiene un'espressione che deve essere eguale ad un numero dato. Scrivendo l'eguaglianza, si ha l'equazione cercata.

Osservazione. Il più delle volte il problema non dice *esplicitamente* quali espressioni devono essere eguali fra loro. In questi casi è utile modificarne un poco l'enunciato in modo da fare comparire l'espressione « *eguale a.....* ».

2°. Si ponga molta attenzione a determinare *con precisione* il significato dell'incognita, evitando in ciò tutte le espressioni *vaghe ed indeterminate*. Si dirà perciò p.e.: *Sia x il numero delle ore impiegate per fare il lavoro,* e non: *Sia x il tempo impiegato, ecc.;* così pure p.e.: *Sia x il numero dei metri di lavoro eseguito,* e non: *Sia x il lavoro fatto, ecc.*

3°. Alcuni problemi contengono varie incognite, e fra queste esistono relazioni note, e tali che, se il valore d'una incognita fosse conosciuto, si potrebbe con tutta facilità trovare il valore delle altre. In questi casi, *si può* procedere così: Si chiama x il valore d'una incognita; e poi, supponendo di conoscere il valore di x, si scrive il valore delle altre. Ciò fatto, sarà facile trascrivere e risolvere il problema per mezzo d'una sola equazione di 1° grado ad una sola incognita, e si otterrà così il valore di x. Trovato questo valore, si troverà poi facilmente il valore delle altre incognite.

4°. Si mettano bene in chiaro tutte le condizioni espresse dal problema, ed anche quelle che il problema lascia sottintese.

Osservazione. Molte volte alcune relazioni esistenti fra l'incognita ed i dati del problema (relazioni necessarie per la risoluzione del problema) non sono date esplicitamente; ma bisogna ricavarle da proposizioni scientifiche, che si suppongono note. Ciò succede in molti problemi che riguardano la fisica, la meccanica, la geometria, ecc.

5°. Se varie grandezze dello stesso genere sono riferite a diverse unità di misura, si faccia uso del *principio di omogeneità*, cioè si riferiscano tutte alla medesima unità di misura. *

Osservazione. Si possono adoperare indifferentemente frazioni ordinarie e frazioni decimali: è tuttavia più comodo far uso, in un medesimo problema, di sole frazioni ordinarie, oppure di sole frazioni decimali. È però da notarsi che d'ordinario, quando si possono usare i valori esatti delle quantità di cui si tratta, non conviene far uso di valori approssimati. Così p.e. non converrà alla frazione $^1/_3$ sostituire il valore approssimato 0,333; e così in luogo di $^7/_8=0{,}0875$ non converrà far uso del valore approssimato 0,08.

6°. Talora la risoluzione del problema riesce assai semplificata introducendo, in luogo dell'incognita del problema, un'altra incognita la quale abbia con quella del problema certe relazioni naturali od anche convenzionali, per modo che, trovato che sia il valore di questa *incognita ausiliaria*, sia poi facile trovare il valore dell'incognita del problema.

PROBLEMA 1°. Si trovi un numero il quale dia il medesimo risultato sia moltiplicandolo per 3, *sia aumentandolo di* 3.

Risoluzione. Sia x il numero cercato. Moltiplicandolo per 3, otterremo $3x$; ed aumentandolo di 3, otterremo $x+3$. Dovendo questi due risultati essere eguali, avremo: $3x=x+3$.

Quest' equazione è la trascrizione algebrica del problema; e risolvendola, avremo risolto il problema. Dall'equazione si ricava immediatamente: $3x-x=3$, ossia $2x=3$, ossia $x=^3/_2=1\,^1/_2$. Questo valore è unico.

Risposta. Il valore cercato è unico, ed è $1\,^1/_2$.

PROBLEMA 2°. Ad una serata di beneficenza la tassa personale d'ingresso è di lire 5 *pei primi posti, e di lire* 3 *pei secondi posti. Si distribuirono in tutto* 350 *biglietti, e si incassarono* 1518 *lire. Quante persone erano nei primi posti, e quante nei secondi posti?*

Risoluzione. Comincio ad osservare che, essendosi distribuiti 350 biglietti, le persone che presero parte alla serata furono 350. Il problema domanda due numeri, e quindi è un problema con due incognite. Ma è facile scorgere che quando si conosca uno dei due numeri cercati, si trova facilmente il

* Il *principio di omogeneità* fu enunciato esplicitamente, per la prima volta, da Francesco Viète (1540-1603).

valore dell'altro. Chiamiamo p.e. x il numero delle persone che occuparono i primi posti. Poichè, in tutto, eranvi 350 persone, il numero di quelle che occuparono i secondi posti sarà $350-x$. Quelle dei primi posti avranno pagato fra tutto lire $5x$, e quelle dei secondi posti lire $3.(350-x)$. L'incasso totale fu di 1518 lire; dunque si avrà l'equazione $5x+3.(350-x)=1518$.

Questa è la trascrizione algebrica del problema.

Risolvendo l'equazione, si ottiene: $5x+1050-3x=1518$, ossia

$2x=1518-1050$, ossia $2x=468$; da cui $x=234$.

Le persone dei primi posti erano 234; quelle dei secondi posti erano $350-234=116$. Poichè l'equazione ci dà un unico valore di x, ne segue che il problema ammette una sola soluzione.

Risposta. *Nei primi posti vi erano* 234 *persone; nei secondi posti* 116.

PROBLEMA 3°. *Si scomponga il numero* 20 *in quattro parti tali che si ottenga sempre il medesimo risultato, sia aumentando la prima parte di* 1, *sia diminuendo la seconda di* 2, *sia moltiplicando la terza per* 3, *sia dividendo la quarta per* 4.

Risoluzione. I numeri da cercarsi (ossia le incognite) sono quattro, cioè le quattro parti in cui deve essere scomposto il numero dato. È però facile vedere che, quando di queste parti se ne conosce una, si trovano facilmente le altre. Risolviamo dunque il problema come se vi fosse una sola incognita.

Sia p.e. x il valore della 1ª parte. Aumentandola di 1, si otterrà $x+1$. Ora dal problema si sa che $x+1$ è eguale al risultato che si ottiene quando si tolgono 2 unità alla 2ª parte; dunque aggiungendo 2 unità ad $x+1$, si deve ottenere la 2ª parte, la quale sarà perciò eguale ad $(x+1)+2=x+3$.

Così pure $x+1$ è eguale al prodotto che si ottiene moltiplicando la 3ª parte per 3; questa 3ª parte sarà perciò eguale ad $(x+1):3=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$.

Inoltre $x+1$ è eguale al quoto che si ottiene dividendo la 4ª parte per 4; questa 4ª parte sarà perciò eguale ad $(x+1).4=4x+4$.

Sommando insieme le quattro parti, si ottiene il numero dato, cioè 20. Dunque il problema si trascriverà per mezzo della seguente equazione:

$$x+(x+3)+\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)+(4x+4)=20, \quad \text{ossia}$$

$$x+x+3+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}+4x+4=20, \quad \text{ossia}$$

$$6x+\frac{x}{3}=20-3-\frac{1}{3}-4 \quad \text{ossia} \quad \left(6+\frac{1}{3}\right)x=13-\frac{1}{3}, \quad \text{ossia} \quad \frac{19}{3}x=\frac{38}{3},$$

$$\text{ossia} \quad 19x=38, \quad \text{ossia} \quad x=2.$$

Essendo la 1ª parte eguale a 2, la 2ª sarà $2+3=5$, la 3ª sarà $(2+1):3=1$, la 4ª sarà $4.2+4=12$. Poichè il valore di x è unico, unico sarà pure il modo con cui si può operare la proposta divisione del numero dato.

Risposta. *Le parti sono rispettivamente* 2, 5, 1, 12.

PROBLEMA 4°. *Al* 1° *di agosto la durata della notte è i* $^3/_5$ *di quella del giorno. Quante ore ha la notte, e quante il giorno?*

Risoluzione. Anche quì due sono i numeri che si cercano; però quando si conoscesse la durata del giorno, si troverebbe poi facilmente quella della notte. Cerchiamo dunque di conoscere la durata del giorno.

A tal fine, chiamiamo x il numero d'ore che dura il giorno; il numero d'ore che dura la notte sarà $^3/_5 x$. Quì bisogna ricordare la condizione sot-

[illegible]rata del giorno più quella della notte è di 24 ore. Avremo q[illegible]i il problema trascritto per mezzo della seguente equazione: $x+{}^3/_5x=24$, ossia ${}^8/_5x=24$, ossia $8x=24.5$, ossia $8x=120$, da cui si ha $x=15$.

La durata del giorno è di 15 ore; quella della notte di ore $15.{}^3/_5=9$.

Il valore di x è unico; sarà quindi anche unico il valore di ${}^3/_5x$.

Risposta. Il giorno ha 15 *ore, la notte ne ha.* 9.

PROBLEMA 5°. *Dei tre angoli di un triangolo, il secondo è i ${}^5/_6$ del primo, ed il terzo supera il secondo di* 36°. *Qual è il valore di ciascun angolo?*

Risoluzione. Gli angoli cercati sono tre; ma, quando si conoscesse il valore del primo, si troverebbe subito il valore degli altri due. Chiamiamo dunque x il valore del primo angolo: quello del secondo sarà ${}^5/_6x$, e quello del terzo ${}^5/_6x+36°$. Quì bisogna ricordare la condizione (che si suppone nota) che la somma dei tre angoli di un triangolo deve essere eguale a 180°. Avremo dunque il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$x+{}^5/_6x+{}^5/_6x+36°=180°$, ossia $(1+{}^5/_6+{}^5/_6)x=180°-36°$, ossia

$\frac{16}{6}x=144°$, ossia $16x=144°\cdot6=864°$; da cui $x=\frac{864°}{16}=54°$.

Il primo angolo è eguale a 54°; e quindi il secondo sarà $54°\times{}^5/_6=45°$, ed il terzo sarà $45°+36°=81°$.

Poichè il valore di x è unico, sarà pure unico il valore di ${}^5/_6x$, ed unico il valore di ${}^5/_6x+36°$. Il problema ammette quindi un'unica soluzione.

Risposta. Il primo angolo è di 54°, *il secondo di* 45°, *il terzo di* 81°.

PROBLEMA 6°. *Una macchina tipografica stampa* 10725 *fogli ogni* 5 *ore; un'altra ne stampa* 354 *ogni* 8 *minuti. In quanto tempo, fra tutte e due, stamperanno* 50000 *fogli?*

Risoluzione. Pel principio di omogeneità, bisogna che il lavoro di ciascuna macchina sia riferito alla medesima unità di tempo. Scegliamo p.e. il minuto, e cerchiamo anzitutto quanti fogli stampa ciascuna macchina in un minuto.

Poichè la 1ª macchina stampa 10725 fogli in 5 ore, ossia in 300 minuti, in un minuto stamperà fogli $\frac{10725}{300}$. Similmente la 2ª che stampa 354 fogli ogni 8 minuti, in 1 minuto stamperà fogli $\frac{354}{8}$.

Sia x il numero dei minuti impiegati fra tutte e due per stampare 50000 fogli. In x minuti, la 1ª stamperà fogli $\frac{10725}{300}x$, e la 2ª fogli $\frac{354}{8}x$. Fra tutte e due, in x minuti, stamperanno fogli $\frac{10725}{300}x+\frac{354}{8}x$. Ma questo numero deve essere eguale a 50000. Avremo quindi il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$$\frac{10725}{300}x+\frac{354}{8}x=50000,\quad\text{ossia}\quad\left(\frac{10725}{300}+\frac{354}{8}\right)x=50000,\quad\text{ossia}$$

$$\frac{10725.8+354.300}{300.8}x=50000,\quad\text{cioè}\quad\frac{192000}{2400}x=50000,\quad\text{ossia}$$

$\frac{1920}{24}x=50000$, ossia $1920x=50000.24$, cioè $1920x=1200000$; da cui

$$x=\frac{1200000}{1920}=625.$$

Essendo unico il valore di x, sarà unica la soluzione del problema.
Risposta. *Impiegheranno* 625 *minuti, cioè* 10 *ore e* 25 *minuti.*

PROBLEMA 7°. *Una macchina consuma* 5 m^3 *di carbone ogni* 10 *ore; un'altra ne consuma* 200 dm^3 *all'ora; una terza* 150 dm^3 *ogni due ore. Per quanto tempo può durare la provvista di* 620 m^3 *di carbone?*

Risoluzione. La quantità di carbone è espressa ora in m^3 ed ora in dm^3; ci è necessario adoperare sempre la stessa unità di misura, p.e. il dm^3. Di ciascuna macchina conosciamo il consumo, ogni 10 ore per la 1ª, ogni ora per la 2ª, ogni due ore per la 3ª. Ci conviene cercare qual'è il consumo di ciascuna macchina durante il medesimo tempo, p.e. durante 1 ora. Chiamando x il numero delle ore impiegate per consumare fra tutte e tre l'intera provvista di carbone, ragioneremo così:

Poichè la 1ª macchina consuma 5 m^3 (ossia 5000 dm^3) ogni 10 ore, in 1 ora consumerà $5000:10=500$ dm^3 di carbone; ed in x ore consumerà dm^3 $500x$.

Se la 2ª consuma 200 dm^3 di carbone all'ora, in x ore consumerà dm^3 $200x$.

La 3ª infine che consuma 150 dm^3 di carbone ogni due ore, in 1 ora ne consumerà dm^3 $150:2=75$; ed in x ore ne consumerà $75x$.

Tutte e tre insieme in x ore consumeranno dm^3 $500x+200x+75x$.

Ma in x ore devono consumare l'intera provvista che è di 620 m^3 (ossia 620000 dm^3) di carbone. Avremo quindi il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$500x+200x+75x=620000$, ossia $775x=620000$, ossia $x=800$ ore.

Il valore di x è unico; perciò il problema ammette un' unica soluzione.
Risposta. *La provvista sarà consumata in* 800 *ore.*

PROBLEMA 8°. *Un colonnello, disponendo i suoi soldati in quadrato, vede che gliene sopravvanzano* 50; *ma per comporre un quadrato che abbia un soldato di più per ogni lato, gliene mancherebbero* 41. *Di quanti uomini si compone il reggimento?*

Risoluzione. L'incognita del problema è il numero dei soldati del reggimento; però in questo caso è più comodo scegliere un'altra incognita.

Chiamando x il numero di soldati messi su ogni lato del 1° quadrato, il numero dei soldati impiegati a formare questo quadrato sarà x^2. Poichè dopo formato il quadrato, sopravvanzano 50 soldati, il numero dei soldati del reggimento sarà x^2+50.

Nel 2° caso, il numero dei soldati messi su ogni lato del quadrato sarebbe $x+1$, ed il quadrato conterrebbe $(x+1)^2$ soldati. Ma, per compiere un tal quadrato, ne mancano 41; dunque il reggimento contiene solamente $(x+1)^2-41$ soldati.

Abbiamo già visto che esso ne contiene x^2+50; e dovendo le due espressioni $(x+1)^2-41$ ed x^2+50 essere eguali, avremo il nostro problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$$(x+1)^2-41=x^2+50, \quad \text{ossia} \quad x^2+2x+1-41=x^2+50, \quad \text{ossia}$$
$$x^2-x^2+2x=50+41-1, \quad 2x=90, \quad \text{ossia} \quad x=45.$$

Nel 1° quadrato vi erano 45 soldati per ogni lato; perciò il quadrato conteneva $45^2=2025$ soldati; ed il reggimento, $2025+50=2075$.

Essendo unico il valore di x, unica sarà la soluzione del problema.
Risposta. *Il reggimento si compone di* 2075 *soldati.*

PROBLEMA 9°. *Un becco di gas consuma* 4 m^3 *di gas ogni* 15 *ore; ed un altro, che si accende* 4 *ore dopo, ne consuma* 200 dm^3 *ogni* 39 *mi-*

nuti. Trascorso un certo tempo, ne hanno consumato tutti e due la medesima quantità. Quanto gas ha consumato ciascuno dei due becchi?

Risoluzione. Ci è comodo prendere per incognita del problema il tempo in cui sta acceso il 1° becco; conosciuto questo, sarà poi facile trovare la quantità di gas consumata. Anzi tutto però bisogna riferire le diverse quantità di gas alla medesima unità di misura, p.e. al dm^3; ed i diversi tempi alla medesima unità di tempo, p.e. al minuto; e poi cercare quanto gas consuma ogni becco nella medesima unità di tempo, cioè in un minuto.

Sia p.e. x il numero dei minuti in cui sta acceso il 1° becco. Poichè esso consuma 4 m^3 (ossia 4000 dm^3) ogni 15 ore (ossia ogni 900 minuti), in 1 minuto consumerà $dm^3\ \frac{4000}{900}=\frac{40}{9}$; ed in x minuti consumerà $dm^3\ \frac{40}{9}x$.

Il 2°, che si accende 4 ore dopo (ossia 240 minuti dopo), starà acceso 240 minuti meno del 1°, ossia minuti $x-240$. Poichè esso consuma 200 dm^3 ogni 39 minuti (ossia $\frac{200}{39}$ dm^3 ogni minuto), in minuti $x-240$ ne consumerà $dm^3\ \frac{200}{39}(x-240)$.

Trascorsi gli x minuti, il 1° avrà consumato $\frac{40}{9}x$ dm^3 di gas, ed il 2° $dm^3\ \frac{200}{39}(x-240)$. Dovendo questo consumo essere eguale pei due becchi, avremo il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$$\frac{200}{39}(x-240)=\frac{40}{9}x, \quad \text{ossia} \quad 9.200(x-240)=39.40x, \quad \text{ossia}$$
$$1800x-432000=1560x, \quad \text{ossia} \quad 240x=432000; \quad \text{da cui} \quad x=1800.$$

Il 1° becco starà acceso 1800 minuti, ossia 30 ore; il 2° $30-4=26$ ore. Poichè il 1° consuma 4 m^3 di gas in 15 ore, in 30 ore consumerà m^3 8.

Essendo unico il valore di x, unica sarà pure la soluzione del problema.

Risposta. *Ciascuno dei due becchi avrà consumato* 8 m^3 *di gas.*

PROBLEMA 10°. *A possiede* 4000 *lire, ed il suo avere diminuisce di* 80 *lire all'anno; mentre B, che ha presentemente lire* 2500, *vede che il suo avere aumenta regolarmente di* 70 *lire all'anno. Fra quanti anni l'avere di B sarà eguale ai* $^5/_8$ *dell'avere di A?*

Risoluzione. Sia x il numero d'anni richiesto. Dopo x anni, l'avere di A sarà diminuito di $80x$ lire; e poichè presentemente A possiede lire 4000, dopo x anni possederà lire $4000-80x$.

Dopo gli x anni l'avere di B sarà aumentato di $70x$ lire; e B possederà lire $2500+70x$.

Ma, dopo questo tempo, l'avere di B deve eguagliare i $^5/_8$ dell'avere di A; avremo dunque il problema trascritto per mezzo dell'equazione:

$$2500+70x={}^5/_8(4000-80x), \quad \text{ossia} \quad 2500+70x={}^5/_8\times4000-{}^5/_8\times80x,$$
$$\text{ossia} \quad 2500+70x=2500-50x, \quad \text{ossia} \quad 70x+50x=2500-2500,$$
$$\text{ossia} \quad 20x=0; \quad \text{da cui} \quad x={}^0/_{20}=0.$$

Poichè il valore di x è unico, unica pure sarà la soluzione del problema.

Risposta. *L'avere di B sarà i* $^5/_8$ *di quello di A dopo zero anni; ossia lo è presentemente.* Ed infatti è appunto $2500={}^5/_8\times4000$.

PROBLEMA 11°. *Si trovino 5 numeri interi consecutivi tali che il quadruplo del numero di mezzo sia eguale alla somma degli altri.*

Risoluzione. Se x è il minore dei cinque numeri cercati, questi saranno rispettivamente x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$; il numero di mezzo sarà $x+2$; ed il problema potrà esser trascritto per mezzo dell'equazione:

$$4(x+2)=x+(x+1)+(x+3)+(x+4), \quad \text{ossia} \quad 4x+8=4x+8,$$
$$\text{ossia} \quad (4-4)x=8-8, \quad \text{ossia} \quad 0x=0, \quad \text{ossia} \quad x=0/_0.$$

Il simbolo $0/_0$ è indizio di indeterminazione.

Risposta. *Il problema è indeterminato; ossia qualsiasi numero intero può essere il primo dei cinque numeri cercati.*

PROBLEMA 12°. *Un padre ha 35 anni, ed il figlio 11. Fra quanti anni l'età del padre sarà eguale a quella del figlio?*

Risoluzione. Sia x il numero d'anni richiesto. Dopo x anni, l'età del padre sarà $35+x$, e quella del figlio $11+x$. Dovendo, dopo x anni, le due età essere eguali, si avrà il problema trascritto per mezzo dell'equazione:

$$11+x=35+x, \quad \text{ossia} \quad x-x=35-11, \quad \text{ossia} \quad 1.x-1.x=35-11,$$
$$\text{ossia} \quad (1-1)x=24, \quad \text{ossia} \quad 0.x=24; \quad \text{da cui} \quad x={}^{24}/_0=\infty.$$

Risposta. *Il simbolo $^{24}/_0$ ci dice che occorrerebbe un numero infinito di anni; cioè il problema è impossibile.*

Osservazione. L'equazione ottenuta è l'esatta trascrizione del problema; ed essendo assurda, ci indica che anche il problema è assurdo. Poichè sappiamo che se due numeri sono eguali fra loro il loro quoto è l'unità, possiamo anche dire che le due età saranno eguali quando sarà $\frac{35+x}{11+x}=1$. Sappiamo inoltre che una frazione si accosta all'unità quando ai due termini si aggiunge un medesimo numero. Ora, ai due termini della frazione $\frac{35}{11}$ si aggiunge ogni anno un'unità; perciò ogni anno la frazione si accosta all'unità; e col crescere indefinito di x, la frazione $\frac{35+x}{11+x}$ si accosta indefinitamente all'unità. Per acquistare il valore 1, bisognerebbe (se esistesse) aggiungere ai due termini di $\frac{35}{11}$ un numero x infinitamente grande. Intendiamo di dire tutto ciò quando diciamo che è $x=\infty$.

PROBLEMA 13°. *In un convito di 45 persone, gli uomini pagarono lire 5 ciascuno, e le donne lire 3 ciascuna. Sapendosi che si pagarono lire 210 in tutto, si domanda quanti erano gli uomini, e quante le donne.*

Risoluzione. Sia x il numero degli uomini; il numero delle donne sarà $45-x$. Gli uomini avranno pagato complessivamente lire $5x$; e le donne lire $3(45-x)$. Poichè la spesa totale fu di 210 lire, avremo l'equazione:

$$5x+3(45-x)=210, \quad \text{ossia} \quad 5x+135-3x=210,$$
$$\text{ossia} \quad 2x=75; \quad \text{da cui} \quad x={}^{75}/_2=37\,{}^1/_2.$$

Il numero degli uomini sarebbe $37\,{}^1/_2$, e quello delle donne $7\,{}^1/_2$, dunque:

Risposta. *Il problema è impossibile.*

Osservazione. La soluzione $x=37\,{}^1/_2$ soddisfa all'equazione, ma non al problema; perchè questo conteneva la condizione non trascrivibile in equazione, che il numero cercato dovesse essere positivo ed intero. Variando opportunamente i dati numerici, si potrebbe togliere l'impossibilità del problema.

PROBLEMA 14°. *Il mio avere aumenta regolarmente di 200 lire all'anno; ed ho presentemente 3180 lire. Fra quanti anni il mio avere sarà tale che il suo doppio aumentato dei suoi $^4/_5$ dia una somma eguale a 7224 lire?*

Risoluzione. Sia x il numero d'anni cercato. Dopo x anni il mio avere sarà aumentato di $200x$ lire, e sarà eguale a lire $3180+200x$: ed i suoi $^4/_5$ saranno eguali a lire $(3180+200x)\frac{4}{5}$. Cosicchè avremo il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$$(3180+200x).2+(3180+200x)\frac{4}{5}=7224 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

ossia $6360+400x+2544+160x=7224$, ossia $560x=-1680$; da cui $x=-3$. Il problema non ammette soluzione.

Nella equazione (1) cambiamo il segno *a tutti e soli i termini contenenti l'incognita,* ed otterremo l'equazione:

$$(3180-200x)2+(3180-200x)\frac{4}{5}=7224 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Poichè la (1) ha per soluzione $x=-3$, pel teor. § 89, la (2) avrà per soluzione $x=3$.

Osservando ora che il mio avere presentemente è di 3180 lire, e che dopo x anni avrò lire $3180-200x$, si scorge subito che il mio avere diminuisce di 200 lire all'anno. Formulando allora il dettato del problema sulla equazione (2), avremo il seguente problema:

Problema modificato. *Il mio avere diminuisce regolarmente di* 200 *lire all'anno; ed ho presentemente* 3180 *lire. Fra quanti anni il mio avere sarà tale che il suo doppio aumentato dei suoi* $^4/_5$ *dia una somma eguale a* 7224 *lire?*

Questo problema ammetterà la risposta: *Dopo* 3 *anni.*

Osservazione. Quando la quantità di cui si cerca il valore ammette nel caso di cui si tratta, un doppio senso, spesso si può ottenere un problema modificato lasciando inalterato tutto il dettato del problema, e cambiando solo il senso della domanda. Es. Nel problema precedente, la domanda è *Fra quanti anni ecc.;* perciò una soluzione positiva accenna ad un tempo futuro, ed una soluzione negativa accenna ad un tempo passato: ed il problema si poteva anche modificare così:

Problema. *Il mio avere aumenta regolarmente di* 200 *lire all'anno; ed ho presentemente* 3180 *lire. Quanti anni fa il mio avere era tale che il suo doppio aumentato dei suoi* $^4/_5$ *dava una somma eguale a* 7224 *lire?*

PROBLEMA 15º. *In un convitto la pensione è di L.* 15 *mensili; si paga inoltre per ogni alunno una sopratassa di entrata di L.* 50. *Voglio collocare i miei tre figli in quel convitto, e posso spendere solamente L.* 60 *in tutto. Per quanto tempo li potrò mantenere in convitto?*

Risoluzione. Sia x il numero dei mesi durante i quali posso tenere i figli in convitto. Poichè per ogni alunno si pagano L. 15 mensili, per 3 alunni e per x mesi, si pagheranno L. $15.3.x$. La sopratassa d'entrata pei 3 figli sarà di L. 50.3; ed in tutto spenderò L. $15.3.x+50.3$.

Ma voglio spendere solamente L. 60. Avremo quindi il problema trascritto per mezzo della seguente equazione: $15.3x+50.3=60$ . . . . . . (1)
ossia $45x=-90$, ossia $x=-2$.

Questo risultato ci indica che il problema è impossibile; perchè, nel caso nostro, il numero dei mesi non può avere un doppio senso.

Cambiamo nella (1) il segno al solo termine contenente la x, ed otterremo l'equazione: $-15.3x+50.3=60$ . . . . (2)

La (2) ha la soluzione $x=2$; ma essa non è trascrivibile in linguaggio ordinario. Proviamo allora a cambiare il segno a tutti i termini della (2), ed otterremo l'equazione: $15.3x-50.3=-60$ . . . . (3)

La (3) è equivalente alla (2), ed al pari della (2) ammette la soluzione $x=2$. Ma neppure la (3) è trascrivibile in linguaggio ordinario. Dunque:

Risposta. *Conservando i medesimi dati numerici, il problema non è affatto modificabile.*

Osservazione. Ogni problema che non dia luogo alla soluzione $x=\infty$, si può sempre trasformare in un altro problema più generale, il quale ammetterà soluzione. Basta a tal fine dare al problema la forma seguente: *Si trovi un numero che ecc.* Es. Il problema precedente si potrebbe esprimere così: *Si trovi un numero il cui triplo moltiplicato per* 15 *e poi aumentato del triplo di* 50 *dia per risultato il numero* 60. E la risposta sarebbe: *Il numero cercato è* —2.

PROBLEMI.

276. Si divida il numero 46 in due parti tali che $1/7$ della prima più $1/3$ della seconda sia eguale a 10.

277. Si chiede un numero che superi di 98 i $5/7$ di se stesso.

278. Aggiungendo $7\ 1/3$ ai $23/4$ d'un numero, oppure togliendo $1\ 2/3$ dai suoi $15/2$, si ottiene lo stesso risultato. Qual'è questo numero?

279. Si pianta un palo nell'alveo d'un fiume in modo che $1/4$ della sua lunghezza sia nella terra, $1/3$ nell'acqua, e 10 metri fuor d'acqua. Dicasi la lunghezza del palo e la profondità del fiume.

280. Una contadina, a cui fu chiesto quante uova aveva, rispose: « Se avessi $1/2$, più $1/3$, più $1/4$ di quante ne ho, ne avrei 20 di più. » Quante uova aveva?

281. Si spendono 33000 lire nella compera di due poderi. Si trovi il costo di ciascuno, sapendo che $1/3$ più $1/4$ del costo del primo eguagliano i $7/10$ del costo del secondo.

282. Quattro persone si spartiscono una somma in modo che alla prima tocca $1/2$ della somma, alla seconda $1/5$, alla terza $1/6$. La quarta ebbe 48 lire. Qual'è la somma spartita? Qual'è la parte di ciascuna persona?

283. Un oste ha vino da 45 e vino da 20 centesimi al litro, e vuol farne 50 litri di miscuglio da vendere a 30 centesimi al litro. Quanti litri deve prendere della 1ª qualità, e quanti della 2ª qualità?

284. Dei re d'una certa dinastia $1/3$ ebbe nome Luigi, $1/4$ Filippo, $1/8$ Carlo, $1/12$ Edoardo, ed altri 5 ebbero nomi differenti. Quanti re ebbe quella dinastia, e quanti furono i re di ciascun nome?

285. Si dividano 100 lire fra tre persone in modo che la 3ª abbia 5 lire meno della 2ª, e questa 10 lire più della 1ª.

286. Un'Aritmetica chinese contiene il seguente quesito: In una stalla vi sono dei fagiani e dei conigli, i quali hanno tutti insieme 100 piedi e 36 teste. Si domanda quanti fagiani vi sono e quanti conigli.

287. Un padre ed i suoi due figli hanno fra tutti 60 anni. L'età del primogenito è tripla di quella del fratello; e quella del padre è doppia della somma dell'età dei due figli. Qual'è l'età di ciascuno?

288. Un ozioso, dal suo 18mo anno fino alla morte, dormì per $3/8$ della sua vita; $1/16$ lo consumò in mangiare e bere, $1/4$ nel passeggiare, $1/16$ nello

star seduto, e $^3/_{16}$ nel giuocare; 2 soli anni dedicò al lavoro. Si domanda di quanti anni morì?

289. Una guarnigione si compone di 1250 soldati. Ogni cavaliere riceve 15 lire al mese, e 10 lire ciascun fante. Il soldo mensile della guarnigione è di lire 13500. Quanti sono i cavalieri, e quanti i fanti?

290. Un pastore ha buoi del valore di 12 marenghi e mezzo l'uno, e pecore da 2 marenghi e $^1/_4$ l'una; in tutto 140 gambe, del valore complessivo di marenghi 191 e mezzo. Quanti sono i buoi, e quante le pecore?

291. Spendo 1920 lire nella compera di un cavallo, d'una vettura e di un biroccino. Il prezzo del biroccino è la quinta parte di quello del cavallo; e la vettura costa il doppio del cavallo. Quanto costa il cavallo, quanto la vettura e quanto il biroccino?

292. Cerca l'età del mio fratellino sapendo che si ottiene lo stesso risultato, o moltiplicandola per 7, od aggiungendovi 7.

293. Dovendosi eleggere uno dei candidati A e B, votano 2143 persone, e viene eletto A con una maggioranza di 193 voti. Quanti voti ottenne ciascuno?

294. Venere parlò un giorno in questa maniera ad Ero che costernato le era venuto dappresso: « Qual cordoglio ti aggrava, o mio figlio? » Egli rispose: « Le Muse affollandosi nel mio giardino m'involarono dal seno le poma che io avevo colte sull' Elicona. Clio me ne prese il quinto, Euterpe il duodecimo, Talia l'ottavo, Melpomene il ventesimo, Tersicore il quarto, Erato il settimo, Polimnia 30, Urania 120, Calliope 300. Io ne vengo a te quasi con le mani vuote, le Dee non mi lasciarono che 50 poma. » Quante poma aveva Ero dapprincipio? (Dal greco).

295. Una contadina arrivò al mercato con un canestro di uova, e col proposito di venderle a 7 centesimi l'uno. Nel deporre il canestro ne ruppe 5. Facendo poi i suoi calcoli, trovò che per rifarsi del danno dovrebbe vendere le uova ad 8 centesimi l'uno. Quante uova portò al mercato?

296. Giacomo spende $^1/_2$ del suo guadagno pel vitto; $^1/_3$ per altre spese, e dopo 40 giorni ha risparmiato 30 lire. Quanto guadagna al giorno?

297. In una società di pie persone si fa una colletta per soccorrere un Istituto di beneficenza. Se ogni persona desse 16 lire si farebbe all'Istituto l'offerta promessa, e si avanzerebbero ancora 240 lire da distribuirsi ai poveri. Se invece ciascuna persona desse solamente 10 lire, mancherebbero ancora 300 lire per fare la somma da offerire all' Istituto. Quante sono le persone, e qual è la somma promessa?

298. Un oste vuol vendere il suo vino a 45 centesimi al litro; ma essendone andati a male 50 litri, per rifarsi del danno deve vendere il vino a 5 centesimi di più al litro. Quanti litri di vino aveva da vendere?

299. In una fortezza vi sono 2600 soldati; e per ogni cavaliere vi sono 3 artiglieri e 9 fantaccini. Quanti sono i soldati di ciascun' arma?

300. Si vuol dividere fra due persone una somma di lire 307,50, dando ad una tante pezze da 2 lire quante pezze da 50 centesimi si danno al- all'altra. Quale sarà la parte di ciascuna?

301. In tre giorni una banca incassò lire 16800. Si dica qual fu l' incasso giornaliero, sapendo che in ciascuno dei giorni susseguenti al primo, l'incasso fu $^1/_4$ di quello del giorno precedente.

302. A Pietroburgo, nel principio di gennaio, la notte supera il giorno di 13 ore. Quanto dura il giorno e quanto la notte?

303. Si sa che vicino ai poli il sole non sorge d'inverno per un certo tempo, e per un tempo eguale non tramonta d'estate. Cerchisi la durata della notte continua al 77° grado di latitudine, sapendo che il tempo in cui nelle 24 ore il sole sorge e tramonta la supera di 45 giorni.

304. « O gentile Pitagora, degno rampollo delle Muse d'Elicona, dimmi un po' quanti giovani hai tu in casa pronti a discendere ad un tuo cenno nell' arringo della scienza, ed a combattere con ardore per il premio dovuto alla vittoria? » gli chiese un giorno Policrate. « Te lo dico subito » gli rispose Pitagora. « Una metà coltiva la matematica; un quarto si dedica allo studio della natura; un settimo ascolta con rigoroso silenzio le mie parole, custodendo entro di sè la dottrina acquistata; oltre di ciò ho tre donne, fra cui primeggia Teano. Tanti sono i Sacerdoti che io educo alle Muse » (Dal greco).

305. Un ragazzo che custodiva un piccolo numero di pecore fu avvicinato da un altro della sua età che per burla gli chiese la metà delle sue pecore. « Se io avessi sei volte, più $^2/_3$, più $^3/_4$, più $^5/_6$ il numero delle pecore che possiedo, e te pure, avrei in tutto cento capi da custodire » gli rispose l'altro. Quante pecore aveva egli?

306. Sul sepolcro di Diofanto, celebre matematico greco, si leggeva la seguente iscrizione: « Questo grandioso monumento racchiude le spoglie di Diofanto; sulla fredda pietra l'Aritmetica incise l'età. Un sesto della sua vita gli fu concesso dal suo Dio di passare nella fanciullezza; un duodecimo dopo gli si coprirono del primo pelo le guance; un settimo dopo prese moglie; cinque anni più tardi gli nacque un figliuolino, il quale fu colto dalla morte quando aveva la metà degli anni del padre. Questi, addolcendo il suo dolore coll'arte dei numeri, visse ancora quattro anni. » Di quale età morì Diofanto? (Dal greco).

307. Sessanta persone spesero 318 lire in un pranzo; si domanda quanti uomini e quante donne vi erano, sapendo che quelli pagarono 6 lire ciascuno, e queste 4 lire ciascuna.

308. Un servo si mette al servizio d'un signore che promette di dargli ogni anno 300 lire ed un vestito. Dopo 5 mesi, il servo si licenzia, e riceve il vestito e 90 lire. Qual è il prezzo del vestito?

309. In una lotteria vi sono 10000 biglietti. La metà di quelli a premio e la terza parte di quelli senza premio fanno, insieme, 3500 biglietti. Quanti sono i biglietti a premio?

310. Con 1550 lire compero un cavallo, un asino, ed un bue. Il prezzo del bue è i $^5/_7$ del prezzo del cavallo; e per l'asino spendo $^1/_{10}$ di quel che mi costa il bue. Quanto spendo per ciascuna bestia?

311. Un Istituto di educazione ha quattro classi. Nella quarta vi sono 26 allievi; nella prima vi è $^1/_5$, nella seconda $^1/_4$, e nella terza $^1/_3$ del numero totale degli alunni. Quanti alunni vi sono nell'istituto, e quanti in ciascuna classe?

312. Due amici vorrebbero acquistare insieme un cavallo. Il primo potrebbe pagare solamente $^1/_5$ del prezzo; e l'altro, $^1/_7$. Riunendo i loro denari, trovano che mancano 276 lire per fare l' acquisto. Quanto costa il cavallo?

313. In grazia d'una eredità, il mio avere aumentò dei suoi $^2/_7$, e divenne eguale a lire 65700. Quanto aveva prima di ricevere l'eredità?

314. Due contadini vorrebbero comperare una macchina agricola. Il primo

può pagare solamente i $^4/_5$ del prezzo, ed il secondo i $^3/_7$. Riunendo il loro danaro, comprano la macchina, e sopravvanzano 96 lire. Quanto fu pagata la macchina?

315. Si dividano 100 lire fra tre persone, in modo che la prima abbia 5 lire di più che la seconda; e questa, 10 lire di più che la terza.

316. Si dividano 100 lire fra tre persone, in modo che la terza abbia 5 lire di più che la seconda; e questa, 10 lire di meno che la prima.

317. Pietro compera ad un medesimo prezzo un'incisione ed una cornice. Se questa costasse una lira di meno, e quella 75 centesimi di più, il prezzo della cornice sarebbe la metà di quello dell'incisione. Quanto costa la cornice?

318. Un padre di famiglia lascia in eredità al suo figlio 300000 lire. Questi ne spende una parte per i ristauri della casa; del rimanente $^1/_3$ lo impiega al 4 $^0/_0$, il resto, al 5 $^0/_0$, ritraendo così una rendita annua di lire 9800. Quanto spese nei ristauri della casa?

319. In una borsa vi sono 27 monete, alcune da lire 5, e le altre da lire 2; in tutto, 90 lire. Quante sono le monete da lire 5, e quante da lire 2?

320. Un albergatore comprò una botte di vino al prezzo di 30 centesimi al litro. Nel trasporto, ne andarono perduti 40 litri; epperciò il costo di un litro divenne di 35 centesimi. Quanti litri di vino conteneva da prima la botte?

321. Una signora spende lire 156,40 nella compera di due pezze di tela, lunghe l'una 34 metri, e l'altra metri 68. Un metro di questa costa lire 1,40 di più che un metro di quella. Quanto costa, al metro, ciascuna pezza?

322. Due capitali la cui differenza è 10000 lire, collocati il maggiore al 6 $^0/_0$ ed il minore al 5 $^0/_0$, produssero in un anno lire 2360. Quali sono i due capitali?

323. Un padre lascia in eredità ai suoi cinque figli lire 8591, colla condizione che la parte del secondogenito sia i $^3/_4$ di quella del primogenito; la parte del terzogenito sia i $^3/_4$ di quella del secondogenito; e così di seguito. Qual è la parte di ciascuno?

324. In tre mesi, una fabbrica d'armi ha fornito 55900 fucili. Si trovi il numero dei fucili mensilmente fornito, sapendo che in ciascun mese susseguente al primo venivano forniti i $^{17}/_{10}$ di quanto era stato fornito il mese precedente.

325. Quaranta Kg. d'acqua salata contengono Kg. 3,4 di sale. Quant'acqua pura bisogna aggiungervi affinchè 40 Kg. del nuovo miscuglio contengano 2 Kg. di sale?

326. In una prima partita perdo $^1/_6$ del mio avere, e 20 lire; in una seconda partita guadagno lire 70; finalmente, in una terza partita perdo $^1/_5$ di ciò che mi rimaneva dopo le due prime partite, e mi rimangono 300 lire. Quante lire aveva prima del giuoco?

327. Giacomo compera una cassa di bottiglie di vino a lire 1,40 l'una. Vendendo poi le bottiglie vuote a 25 centesimi l'una, la sua spesa si riduce a lire 55,20. Quante bottiglie vi erano nella cassa?

328. Quanto vino da 70 centesimi al litro devesi mescolare con 72 litri di vino da 60 centesimi al litro, e con 112 litri da 80 centesimi al litro, per avere un miscuglio da 74 centesimi al litro?

329. Un contadino vende il suo cavallo a lire 120 di più di quanto aveva speso

nel comprarlo; e fa così un guadagno del 12 $^0/_0$ sul prezzo di compera. A qual prezzo il contadino comperò il cavallo?

330. Di una corda, $^1/_{10}$ è tinto in rosso, $^1/_{20}$ in arancio, $^1/_{30}$ in giallo, $^1/_{40}$ in verde, $^1/_{50}$ in azzurro, $^1/_{60}$ in indaco, ed il restante, che è lungo 302 metri, in violetto. Qual è la lunghezza della corda?

331. In un miscuglio di vino ed acqua, di vino c'è la metà, più 25 litri; e d'acqua ce n'è $^1/_3$, meno 5 litri. Quanti litri di vino, e quanti litri d'acqua vi sono?

332. Onorato, che si esercita al tiro, riceve 3 lire per ogni colpo giusto, e ne paga una per ogni colpo fallito. Ora, dopo aver sparati 100 colpi, egli non ha nulla da ricevere e nulla da dare. Quante volte tirò giusto?

333. Un numero consta di sei cifre, di cui la 1ª a sinistra è 4; se questa si trasporta nel 1° posto a destra, il numero risultante è i $^2/_3$ del primo. Si trovi il primo numero.

334. La somma delle tre cifre componenti un numero è 13. La cifra delle unità vale tre volte quella delle centinaia; ed aumentando il numero di 396, si ottiene per somma lo stesso numero delle cifre scritte in ordine inverso. Si cerchi il numero.

335. Si chiede quanti salti dovrà fare un cane per raggiungere una lepre che ne ha già fatto 60, sapendo che mentre il cane fa 6 salti la lepre ne fa 9, e che 7 di questi valgono soltanto 3 di quelli.

336. Si trovi quel numero i cui $^2/_7$ aumentati dei 291 millesimi del numero stesso danno per risultato 0,0027.

337. Si divida il numero 200 in due parti tali che dividendo la prima per 16 e la seconda per 10, la differenza dei quoti sia 6.

338. La differenza di due numeri è 496; il loro quoto è 4, ed il resto della loro divisione è 60. Quali sono questi due numeri?

339. Una donna greca recatasi al tempio di Giove pregava il nume a raddoppiarle il danaro che aveva portato seco. Esaudita nella sua domanda, gli offrì in ringraziamento due dramme. Col rimanente danaro andò al tempio di Apollo, fece la stessa domanda, fu esaudita, e offrì in ringraziamento due dramme. Dopo ciò, numerando il suo danaro, lo trovò con suo piacere doppio di quello che era dapprincipio. Quanto danaro aveva seco?

340. Una persona ha L. 1300 distribuite in tre sacchetti di colori rispettivamente bianco, rosso e nero. Nel bianco c'è il doppio di quanto trovasi nel rosso, e nel nero la quarta parte di quanto vi è nei due sacchetti bianco e rosso. Qual somma si trova in ciascun sacchetto?

341. Da una botte piena di vino si spilla $^1/_4$ del contenuto, poi i $^4/_9$ del rimanente, e poi 16 litri. Il vino rimasto è la settima parte di quanto se n'è spillato le due prime volte insieme. Quanti litri di vino conteneva la botte?

342. Un oste ha vino da 30 lire l'ettolitro. Ne vende $^1/_2$ a 35 lire l'ettolitro, $^1/_3$ a 29 lire l'ettolitro ed il rimanente a 32 lire l'ettolitro; e guadagna lire 1815. Quanti sono gli ettolitri di vino venduto?

343. Devo fare un pagamento di 82 lire, con 20 monete, di cui alcune da 2 lire, ed altre da 5 lire. Quante monete di ciascuna specie devo dare?

344. Un venditore d'aceto vuole annacquare il suo aceto perchè è troppo forte. Se puro, lo vende a lire 18,75 l'ettolitro. Quant'acqua dovrà aggiungere a 24 ettolitri d'aceto per poter vendere il miscuglio a 15 centesimi al litro?

345. Una signora comperò 18 metri di stoffa per farsi un vestito, dimenticando che quando si bagna la stoffa, questa si restringe. La lunghezza essendo diminuita di $^1/_{20}$, quanta stoffa dovrà comperare ancora per avere 18 metri di stoffa dopo la bagnatura?

346. Si vuol alberare una strada, e si ha un certo numero di alberi. Mettendone 2 ogni 7 metri, si avanzano 118 alberi; e se si avessero 120 alberi di più, se ne potrebbero mettere 3 ogni 7 metri. Quanti metri è lunga la strada, e quanti alberi si hanno?

347. Per legare, nel senso della lunghezza, un pacco di libri che ha 35 centimetri di spessore, con una corda lunga 2 metri, mi mancano 40 centimetri di corda. Qual è la lunghezza del pacco se, di questi 40 centimetri che mi mancano, 10 sarebbero impiegati per il nodo?

348. Pietro e suo figlio salivano una torre, ed il figlio era costantemente indietro di 24 gradini. Quando il padre fu al mezzo della salita, disse al figlio: « Quando io sarò sulla cima, tu sarai ad un'altezza ottupla di quella a cui ora ti trovi. » Di quanti gradini era la scala della torre?

349. Compero 7 Kg. di mercanzia, ed ottengo la riduzione di 40 centesimi per Kg. Fatti i calcoli, trovo che sopra 40 lire che dovrei pagare mi si restituisce il prezzo d'un Kg. Qual è questo prezzo?

350. Luigi prese durante il mese di maggio un compagno di lavoro, coll'obbligo di somministrargli il vitto per tutti i giorni del mese, dargli inoltre lire 1,30 per ogni giorno di lavoro, e fare, pel vitto, una ritenuta di lire 1,15 per ogni giorno in cui non si sarebbe lavorato. Alla fine del mese, Luigi deve dare al compagno lire 23,15. Quanti furono i giorni di lavoro?

351. Antonio promise di dare a Giuseppe una certa quantità di vino, ricevendo in compenso un orologio e 200 lire. Ma, non avendo potuto dare che i $^3/_4$ del vino promesso, ricevette soltanto 120 lire e l'orologio. Qual è il prezzo dell'orologio?

352. In un frutteto, il numero dei peri è inferiore di 3 a quello dei meli; il numero di questi supera di 6 quello dei ciliegi; il numero di questi è triplo di quello dei susini; i peschi sono tanti quanti i susini ed i peri presi insieme. Sapendo che si hanno, in tutto, 68 alberi, si dica quante piante di ciascuna specie vi sono nel frutteto.

353. Due treni partono l'uno all'incontro dell'altro da due città distanti fra di loro km. 141, e la velocità dell'uno è i $^3/_4$ di quella dell'altro. Sapendosi che il 1° parte alle 10 antim. e l'altro alle 7 antim., e che si incontrano alle 3 pom., si domanda con quale velocità cammina ciascun treno.

354. Un campo rettangolare è lungo il doppio di quanto è largo; ed un altro campo rettangolare che è 50 metri più lungo del primo, e 10 metri più largo del primo, ha 6800 m² di area di più del primo. Quali sono le dimensioni di ciascuno dei due campi?

355. Due viaggiatori si mettono in cammino, l'uno con 100 lire, e l'altro con 48 lire. I ladri rubano loro una parte del denaro. Il primo conserva ancora una somma tripla di quella che conserva il secondo, quantunque sia stato derubato d'una somma doppia di quella tolta al secondo. Quanto fu rubato a ciascuno?

356. Un viaggiatore spende ogni giorno la metà di quanto possiede, più 1 lira; e dopo 3 giorni ha speso tutto. Qual somma aveva?

357. Con due recipienti A e B che contengono eguali quantità di vino, si fanno le seguenti operazioni: dal 1° si tolgono 3 litri di vino e si versano nell'altro; indi si prende la metà del vino contenuto nel 2° e si versa nel 1°; e poi i $^3/_5$ del vino contenuto nel 1° e si versano nel 2°. Dopo quest'ultima operazione si trova che il 1° recipiente contiene 14 litri meno del 2°. Quanto vino v'era dapprima in ciascun recipiente?

358. Una contadina portò a vendere al mercato un certo numero di uova. Dapprima ne vendette la metà, più mezzo uovo, senza romperne alcuno; indi la metà del residuo, più un mezzo uovo; e così fece cinque volte di seguito, dopo di che rimase con un uovo solo. Quante uova portò al mercato?

359. Un fruttivendolo vende per lire 11,70 un canestro contenente aranci e mele; ed il numero di queste supera di 180 il numero di quelle. Vende le mele in ragione di 5 per 3 soldi; e da 15 arancie ricava un soldo e mezzo di più che da 35 mele. Quante arancie e quante mele ha venduto?

360. Una caldaia della capacità di 442 litri venne empita in 12 minuti per mezzo di due secchie. La maggiore, avente una capacità doppia dell'altra, si vuotava due volte in 3 minuti; e la minore, 3 volte in 2 minuti. Qual è la capacità di ciascuna secchia?



INDICE DEI NOMI DEGLI AUTORI

INDICE

PARTE PRIMA

APPENDICE



PARTE SECONDA

Esercitazioni relative alla parte prima